Geometria 1

Prova in itinere del 25/11/2016

Esercizio 1.
Sia $T_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T_a(x, y, z, t) = (x + ay, -x + (a-1)y + z - t, -a^2 y - z + t, 3ay + t)$$

Si domanda per quali valori dei parametri reali a, b:

1. il vettore $(-1, 1, -4, -3)$ appartiene al nucleo di T_a;
2. T_a è un isomorfismo;
3. il vettore $(b, 0, 0, b)$ appartiene all'immagine di T_a.

Esercizio 2.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia (v_1, v_2, v_3, v_4) una base di V. Sia $F \subset V^*$ l'insieme dei funzionali che si annullano su $v_1 + v_2$.

1. È vero che $\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(v_1 - v_2 + v_3, 2v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \subset F$?
2. Provare che per $v \in V$, $v_3 + v_4 \in \mathrm{Ann}(F \cap \mathrm{Ann}(v))$ se e solo se $v \in \mathrm{Span}(v_1 + v_2, v_3 + v_4)$ e $v \notin \mathrm{Span}(v_1 + v_2)$.

Esercizio 3.
Sia $V = \mathcal{M}(2, 3, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2x3 a coefficienti reali, e siano $W, U \subset V$ i sottospazi vettoriali

$$W = \{A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\}, \quad U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Sia $g \in V^*$ il funzionale definito da $g(A) = \mathrm{tr}(A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$, per ogni $A \in V$. Sia H il nucleo di g.

1. Dimostrare che $V = W \oplus U$ e calcolare le dimensioni di $W \cap H$ e di $U \cap H$.
2. Costruire se esiste, o dimostrare che non esiste, un'applicazione lineare $f \in \mathrm{End}(V)$ tale che $f(W) = W \cap H$, $U \cap H \subset \mathrm{Ker} f$, $\dim \mathrm{Ker} f = \dim U$.