Anno Accademico 2016/2017
Geometria 1
Prova scritta del 12/6/2017

Esercizio 1. Fissato $n \geq 1$, siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ due matrici quadrate di ordine n a coefficienti complessi tali che $AB = BA$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) A, B diagonalizzabili $\implies$ $A + B$ diagonalizzabile.

b) A, B nilpotenti $\implies$ $A + B$ nilpotente.

c) Esistono $C, N \in M(n, \mathbb{C})$, C diagonalizzabile, N nilpotente, tali che $CN = NC$ e $A = C + N$.

d) Siano $C_1, N_1 \in M(n, \mathbb{C})$, C_1 diagonalizzabile, N_1 nilpotente, tali che $C_1N_1 = N_1C_1$ e $A = C_1 + N_1$. Allora, $C_1C = CC_1 \implies C_1 = C$ e $N_1 = N$ (dove C e N sono le matrici del punto precedente).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $\psi \in PS(V)$ un prodotto scalare non degenere su V. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e sia $W \subset V$ un sottospazio f-invariante. Indichiamo con f^* l'aggiunta di f rispetto a ψ. Dimostrare che:

a) $W^\perp$ è f^*-invariante;

b) il polinomio caratteristico di ${f^*}_{|_{W^\perp}}$ divide il polinomio caratteristico di f;

c) se $\psi_{|W}$ è non degenere, allora il polinomio caratteristico di f è il prodotto del polinomio caratteristico di $f_{|W}$ e del polinomio caratteristico di ${f^*}_{|_{W^\perp}}$.

Esercizio 3. Per $a \in \mathbb{R}$, sia $B_a \in M(4, \mathbb{R})$ la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & 0 \\ -a & 2 & a & -1 \\ 1 & a & -2 & a \\ 0 & -1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

e sia φ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ dato da $\varphi_a(X, Y) = {}^tXB_aY$, per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$. Sia $W_a = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)^\perp$ (dove l'ortogonalità è relativa a φ_a). Sia $F \in (\mathbb{R}^4)^*$ il funzionale dato da $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right)) = x + y + z + t$, per ogni $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4$.

a) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la segnatura di B_a.

b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la restrizione di φ_a a $\mathrm{Ker}\, F$ è semidefinita.

c) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ il funzionale F è rappresentabile tramite φ_a. Per $a = 0$, rappresentare F tramite φ_0.

d) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il tipo proiettivo della conica in $\mathbb{P}(W_a)$ data dal cono isotropo di ${\varphi_a}_{|_{W_a}}$.