Anno Accademico 2018/2019
Geometria I
Scritto del 13/6/2019

Esercizio 1. (R1)
Fissato un intero $n > 0$, sia $M \in M(n, \mathbb{R})$ di rango 1 e traccia diversa da 0. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ e sia $W = \operatorname{Span}(A, M)$.

Dimostrare che:

a) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} M \oplus \operatorname{Im} M$.

b) $\det(A + xM) = \det A$ per ogni $x \in \mathbb{R} \iff \exists v \in \operatorname{Ker} M$, $v \neq 0$, tale che $Av \in \operatorname{Im} M$.

c) Per $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a + d = c + b$ e $ad < bc$, ogni elemento di W è diagonalizzabile.

Esercizio 2. (C, R1)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di V. Per $1 \leq i < j \leq 4$, denotiamo con $W_{i,j}$ il sottospazio generato da v_i e v_j. Sia $U \subsetneq V$ un sottospazio tale che $U \cap W_{i,j} = \operatorname{Span}(v_i + v_j)$ per $(i, j) = (1, 2), (3, 4)$ e $(2, 4)$.

In ognuno dei casi seguenti, costruire se esiste, o dimostrare che non esiste, una $f : V \to V$ lineare tale che i sottospazi $U, W_{1,2}, W_{3,4}$ sono f-invarianti e:

a) le restrizioni $f|_U$ e $f|_{W_{1,2}}$ sono diagonalizzabili, mentre la restrizione $f|_{W_{3,4}}$ non lo è;

b) le restrizioni $f|_{W_{1,2}}$ e $f|_{W_{3,4}}$ sono diagonalizzabili, mentre la restrizione $f|_U$ non lo è;

c) le restrizioni $f|_U$ e $f|_{W_{1,2}}$ sono non diagonalizzabili, mentre la restrizione $f|_{W_{3,4}}$ lo è;

d) le restrizioni $f|_{W_{1,2}}$ e $f|_{W_{3,4}}$ sono non diagonalizzabili, mentre la restrizione $f|_U$ lo è.

Esercizio 3. (C, R2)
Sia $A \in M(4, \mathbb{R})$ una matrice tale che $\operatorname{tr} A \neq 0$, $A^2 + I$ è singolare e il polinomio minimo di A ha grado 3.

a) Determinare le possibili forme normali di Jordan reali per A.

b) Calcolare la dimensione del sottospazio W di $M(4, \mathbb{R})$ dato dalle matrici che anticommutano con A, $W = \{B \in M(4, \mathbb{R}) | \ AB = -BA\}$.

Sigle: C=compito, R1=recupero primo compitino, R2=recupero secondo compitino.
Durata: C 3 ore; R1,R2 1,5 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

Esercizio 4. (C, R2)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, sia φ un prodotto scalare non degenere su V e sia f un endomorfismo di V. Siano $U, W \subset V$ due sottospazi tali che $U \subset W^{\perp}$ e $V = U + W$.

a) Mostrare che $\varphi|_U$ e $\varphi|_W$ sono non degeneri.

b) Mostrare che se U, W sono f-invarianti e le restrizioni $f|_U, f|_W$ sono autoaggiunte rispetto a $\varphi|_U$ e $\varphi|_W$ rispettivamente, allora f è autoaggiunto.

c) Supponiamo esista g un endomorfismo di V autoaggiunto di rango almeno $\dim V - 1$ che commuta con f tale che $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g = V$. Mostrare che se gf è autoaggiunto allora f è autoaggiunto.

Esercizio 5. (C)
Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Per $v \in V$ denotiamo con $t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la traslazione del vettore v.
Dati $E, F \subset \mathbb{A}$ sottospazi affini, sia

$$T(E,F) = \bigcup_{\substack{v \in V: \\ t_v(E) \cap F \neq \emptyset}} t_v(E),$$

l'unione dei traslati di E che intersecano F.

Mostrare che:

a) $T(E,F)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ di giacitura $Giac(E) + Giac(F)$.

b) Sono equivalenti:

   1 $E \cap F \neq \emptyset$
   2 $T(E,F) \cap E \neq \emptyset$.
   3 $T(E,F) \cap T(F,E) \neq \emptyset$.
   4 $T(E,F) = T(F,E) = E + F$.