Anno Accademico 2018/2019
Geometria I
Scritto del 16/9/2019

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\dim V = n$.

Esercizio 1. Per ogni $(v, \phi) \in V \times V^*$ sia $f_{v,\phi} \in \mathrm{End}(V)$ definito da $f_{v,\phi}(w) = \phi(w)v$, per ogni $w \in V$. Sia $T : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{K}$ lineare e tale che se f e g sono coniugati allora $T(f) = T(g)$. Per ogni base $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ di V, indichiamo con $Z^* = \{z^1, \dots, z^n\}$ la base duale.

a) Al variare di v e ϕ, calcolare la traccia $tr(f_{v,\phi})$.

b) Supponendo che $\phi(v) \neq 0$, dimostrare che per ogni base Z di V, $T(f_{v,\phi}) = \phi(v)T(f_{z_1,z^1})$.

c) Supponendo che $\phi(v) = 0$, dimostrare che $T(f_{v,\phi}) = -T(f_{v,\phi})$.

d) Dimostrare che se la caratteristica di $\mathbb{K}$ è diversa da 2, allora esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che per ogni $f \in \mathrm{End}(V)$, $T(f) = \lambda \operatorname{tr}(f)$, cioè T è un multiplo della traccia.

Esercizio 2. Sia $S \subset \mathrm{End}(V)$, $f \in \mathrm{End}(V)$ tale che $f \circ g = g \circ f$ per ogni $g \in S$. Un sottospazio W di V è detto S-invariante se lo è per ogni $g \in S$.

a) Dimostrare che per ogni polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, il nucleo e l'immagine di $p(f)$ sono S-invarianti.

b) Supponiamo che i soli sottospazi S-invarianti siano quelli banali: 0 e tutto V. Si supponga inoltre che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Si dimostri allora che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f = \lambda id$.

c) Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, costruire un S di cardinalità minima per cui i soli sottospazi S-invarianti siano quelli banali.

Esercizio 3. Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siano Φ un prodotto scalare su V definito positivo, N l'insieme dei prodotti scalari non degeneri su V. Per ogni base $\mathcal{B}$ di V ortonormale per Φ si consideri l'applicazione $f_{\mathcal{B}} : N \to N$ definita ponendo per ogni $\Psi \in N$, $f_{\mathcal{B}}(\Psi)$ l'unico elemento di N tale che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{B}}(\Psi)) = M_{\mathcal{B}}(\Psi)^{-1}$ (si ricordi che se $A \in GL(n, \mathbb{R})$ è simmetrica allora anche A^{-1} lo e').

a) Dimostrare che per ogni $\Psi \in N$, $f_{\mathcal{B}}(\Psi)$ non dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}$, per cui $f(\Psi) = f_{\mathcal{B}}(\Psi)$ è una ben definita applicazione $f : N \to N$.

b) Dimostrare che f è bigettiva e determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste $\Psi \in N$ tale che $f(\Psi) = a\Psi$.

e) Dimostrare che se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\Phi + t\Psi$ è definito positivo, allora Ψ e $t\Phi + f(\Psi)$ hanno la stessa segnatura.

Esercizio 4. Al variare di (a, b) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ si determini il tipo affine della conica reale $C_{a,b}$ di equazione $ax^2 + 2bxy - a = 0$. Determinare se esiste $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(a, b) \neq (1, 1)$, tale che $C_{1,1}$ e $C_{a,b}$ siano isometriche.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.