A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II Compito del 7/07/2005

Esercizio 1
Siano

$$U_\lambda = \mathrm{Span}\big((\lambda-1,-1,\lambda-2),\ (2+\lambda,2,4+\lambda)\big), \quad W_\lambda = \mathrm{Span}\big((\lambda,\lambda,4),\ (1-\lambda,1-\lambda,-2)\big)$$

sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dipendenti da un parametro reale λ. Sia inoltre $L \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni:

$$\big\{x-y-2z=0,\ z+2y=0\big\}.$$

(1) Discutere la dimensione di $U_\lambda + W_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) Per quali λ abbiamo $(U_\lambda + W_\lambda) \oplus L = \mathbb{R}^3$?

Esercizio 2
Sia $A \in M(3,3,\mathbb{R})$ una matrice non diagonalizzabile, avente polinomio caratteristico $p_A(x) = (x-1)(x-2)^2$.

(1) Dimostrare che A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
(2) Dimostrare che esistono esattamente 2 piani in $\mathbb{R}^3$ invarianti per l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3
Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensioni n e m rispettivamente. Siano inoltre V_1 e V_2 sottospazi di V di dimensione n_1 e n_2 rispettivamente, con $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Sia infine $W_1 \subset W$ un sottospazio di dimensione m_1.

Supponiamo che W sia dotato di un prodotto scalare ϕ definito positivo. Dimostrare che l'insieme:

$$\Big\{f : V \to W \text{ lineari} \ \Big|\ f(V_1) \subset W_1,\ f(V_2) \subset W_1^\perp\Big\}$$

è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(V,W)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4
Sia ϕ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che esistano due sottospazi $U, W \subset \mathbb{R}^3$ distinti di dimensione 2, tali che $\phi|_U$ e $\phi|_W$ abbiano entrambi rango 1 e $\psi|_{U\cap W}$ sia definito positivo.

(1) Dimostrare che ϕ non può avere rango 2.
(2) Nei casi in cui ϕ è non degenere, calcolare la segnatura di ϕ.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II. Durata: G1 e G2 2,5 ore, VO 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.