CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II Compito del 13/1/2004

Esercizio 1 [G1, R1]

Si considerino, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, i seguenti sottospazi vettoriali di R^3:

$$W_1 = Span\{\begin{pmatrix}1-\lambda\\1\\2-\lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2+\lambda\\2\\4+\lambda\end{pmatrix}\} \qquad W_2 = Span\{\begin{pmatrix}1-\lambda\\1-\lambda\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\4\end{pmatrix}\}.$$

a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di W_1 e quella di W_2.

b) Dire per quali valori di λ il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ appartiene a $W_1 + W_2$.

Esercizio 2 [G1, R1, VO]

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3y - z, y - z, 2x + 4z).$$

a) Determinare il nucleo e l'immagine di f.

b) Costruire, se esiste, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di rango 1 tale che $f + g$ sia un isomorfismo con traccia uguale a 2.

Esercizio 3 [G1, R2]

Data $A \in M(n, \mathbb{R})$, si considerino le seguenti matrici in $M(2n, \mathbb{R})$:

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

a) Detto r il rango di A, determinare il rango di B e quello di C.

b) Supponiamo che A sia diagonalizzabile. È vero che B è diagonalizzabile? È vero che C è diagonalizzabile?

c) Supponiamo che A sia triangolabile. È vero che B è triangolabile? È vero che C è triangolabile?

Esercizio 4 [G1, R2, VO]

Sia $< \, , \, >$ un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ e sia $V = Hom(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, si consideri l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $b(f, g) =< f(v), g(v) >$.

a) Verificare che b è un prodotto scalare su V.

b) Determinare la segnatura di b.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II; R1 = Recupero primo compitino, R2 = recupero secondo compitino. Durata: R1, R2 2 ore, G1, G2, VO 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Sia $V = M(2,\mathbb{R})$ e siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che esiste un unico prodotto scalare φ su V non degenere tale che:

   1) A_1, A_2, A_3, A_4 sono isotropi;

   2) A_1 e A_2 sono ortogonali ad A_3 e A_4;

   3) $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2$ e $\varphi(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = -2$.

b) Calcolare l'indice di Witt di φ.

c) Rappresentare tramite φ il funzionale traccia tr: $V \to \mathbb{R}$.

Esercizio 6 [VO, G2]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 5. Sia $f \in$End(V) con polinomio caratteristico $p_f(x) = (x-1)^3(x-2)^2$.

a) Determinare tutti i possibili polinomi minimi per f.

b) Per quali polinomi minimi esiste una unica forma canonica di Jordan corrispondente?

Esercizio 7 [VO, G2]

In $\mathbb{R}^2$, sia T_1 (rispettivamente T_2) un triangolo isoscele che ha la base coincidente con un lato di un rettangolo R_1 (rispettivamente R_2).

a) Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ che manda R_1 in R_2 e T_1 in T_2.

b) Tale affinità è unica?

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II Compito del 13/1/2004

Esercizio 1 [G1, R1]

Si considerino, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, i seguenti sottospazi vettoriali di R^3:

$$W_1 = Span\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ 2-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 2 \\ 4+\lambda \end{pmatrix} \} \qquad W_2 = Span\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1-\lambda \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix} \}.$$

a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di W_1 e quella di W_2.

b) Dire per quali valori di λ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $W_1 + W_2$.

Esercizio 2 [G1, R1, VO]

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3y - z, y - z, 2x + 4z).$$

a) Determinare il nucleo e l'immagine di f.

b) Costruire, se esiste, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di rango 1 tale che $f + g$ sia un isomorfismo con traccia uguale a 2.

Esercizio 3 [G1, R2]

Data $A \in {}_n\mathbb{R}_n$, si considerino le seguenti matrici in ${}_{2n}\mathbb{R}_{2n}$:

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

a) Detto r il rango di A, determinare il rango di B e quello di C.

b) Supponiamo che A sia diagonalizzabile. È vero che B è diagonalizzabile? È vero che C è diagonalizzabile?

c) Supponiamo che A sia triangolabile. È vero che B è triangolabile? È vero che C è triangolabile?

Esercizio 4 [G1, R2, VO]

Sia $< \, , \, >$ un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ e sia $V = Hom(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, si consideri l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $b(f, g) =< f(v), g(v) >$.

a) Verificare che b è un prodotto scalare su V.

b) Determinare la segnatura di b.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II; R1 = Recupero primo compitino, R2 = recupero secondo compitino. Durata: R1, R2 2 ore, G1, G2, VO 3 ore.

Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$ e siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che esiste un unico prodotto scalare φ su V non degenere tale che:

   1) A_1, A_2, A_3, A_4 sono isotropi;

   2) A_1 e A_2 sono ortogonali ad A_3 e A_4;

   3) $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2$ e $\varphi(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = -2$.

b) Calcolare l'indice di Witt di φ.

c) Rappresentare tramite φ il funzionale traccia tr: $V \to \mathbb{R}$.

Esercizio 6 [VO, G2]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 5. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ con polinomio caratteristico $p_f(x) = (x-1)^3(x-2)^2$.

a) Determinare tutti i possibili polinomi minimi per f.

b) Per quali polinomi minimi esiste una unica forma canonica di Jordan corrispondente?

Esercizio 7 [VO, G2]

In $\mathbb{R}^2$, dati due rettangoli R_1 e R_2 sia T_1 (rispettivamente T_2) un triangolo isoscele che ha la base coincidente con un lato di R_1 (rispettivamente R_2).

a) Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ che manda R_1 in R_2 e T_1 in T_2.

b) Tale affinità è unica?