Corso di Laurea in Fisica

Geometria I e II
Appello del 3/2/2004

Esercizio 1 (G1)
Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (3, 0, -1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$.

Determinare tutte le matrici reali 3×3 della forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ f & g & h \end{pmatrix}$ che hanno v_1, v_2 e v_3 come autovettori.

Esercizio 2 (G1, VO)
Sia B una matrice reale $n \times n$, con $n \geq 2$, e sia $V_B = \{M \in {}_n\mathbb{R}_n \mid MB = BM\}$.

a) Dimostrare che V_B è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{R}_n$.
b) Dimostrare che $\dim V_B \geq 2$.
c) Determinare $\dim V_B$ nel caso in cui B è la matrice elementare avente l'elemento di posto $(1,1)$ uguale ad 1 e tutti gli altri elementi nulli.

Esercizio 3 (G1)
Siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, con $W_1 \neq W_2$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che W_1 e W_2 sono gli unici sottospazi di dimensione 2 f-invarianti.

a) Dimostrare che f è triangolabile.
b) Dimostrare che f non è diagonalizzabile.
c) Dire se è possibile che le restrizioni di f a W_1 e a W_2 siano entrambe diagonalizzabili.
d) Costruire un esempio esplicito di W_1, W_2 e f con le proprietà suddette.

Esercizio 4 (G1, VO)
Sia V uno spazio vettoriale reale e sia Φ un prodotto scalare su V.
Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Se Φ è semidefinito positivo, allora il radicale di Φ coincide con l'insieme dei vettori isotropi.
b) Se W è un sottospazio vettoriale di V, allora $i_0(\Phi|_W) \leq i_0(\Phi)$.
c) Se Φ è non degenere, allora esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che $\Phi|_W$ è il prodotto scalare nullo e $\dim W \geq \min(i_+(\Phi), i_-(\Phi))$.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

considerare il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^3$ dato da $g(x,y) = {}^t xMy$.

a) Trovare l'indice di Witt di g.

b) Determinare una decomposizione $\mathbb{R}^3 = W \oplus H$, dove H è una somma diretta di piani iperbolici e $g_{|W}$ è definito.

c) Trovare l'aggiunta f^* (rispetto a g) dell'endomorfismo f dato da $f(x,y,z) = (y, z+x, x+2y)$.

Esercizio 6 (G2, VO)

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare con solo due autovalori $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ tali che $m(a) > m(b)$, dove $m(\lambda)$ è la molteplicità algebrica di λ.

a) Dimostrare che la molteplicità geometrica di b è 1.

b) Trovare il polinomio caratteristico di f.

c) Determinare i possibili polinomi minimi di f.

4) Dimostrare che, in tutti i casi, esisite un unico sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 f-invariante tale che la restrizione di f a W ha solo l'autovalore a.

Esercizio 7 (G2, VO)

Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,1)$ $eT' \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,t)$.

Determinare condizioni necessarie e/o sufficienti su t e a affinché esista una affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(T) = T'$ e $f(T') = T$. Tale f è unica?

Corso di Laurea in Fisica

Geometria I e II
Appello del 3/2/2004

Esercizio 1 (G1)
Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (3, 0, -1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$.

Determinare tutte le matrici reali 3×3 della forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ f & g & h \end{pmatrix}$ che hanno v_1, v_2 e v_3 come autovettori.

Esercizio 2 (G1, VO)
Sia B una matrice reale $n \times n$, con $n \geq 2$, e sia $V_B = \{M \in M(n, \mathbb{R}) \mid MB = BM\}$.

a) Dimostrare che V_B è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{R})$.
b) Dimostrare che $\dim V_B \geq 2$.
c) Determinare $\dim V_B$ nel caso in cui B è la matrice elementare avente l'elemento di posto $(1, 1)$ uguale ad 1 e tutti gli altri elementi nulli.

Esercizio 3 (G1)
Siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, con $W_1 \neq W_2$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che W_1 e W_2 sono gli unici sottospazi di dimensione 2 f-invarianti.

a) Dimostrare che f è triangolabile.
b) Dimostrare che f non è diagonalizzabile.
c) Dire se è possibile che le restrizioni di f a W_1 e a W_2 siano entrambe diagonalizzabili.
d) Costruire un esempio esplicito di W_1, W_2 e f con le proprietà suddette.

Esercizio 4 (G1, VO)
Sia V uno spazio vettoriale reale e sia Φ un prodotto scalare su V.
Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Se Φ è semidefinito positivo, allora il radicale di Φ coincide con l'insieme dei vettori isotropi.
b) Se W è un sottospazio vettoriale di V, allora $i_0(\Phi|_W) \leq i_0(\Phi)$.
c) Se Φ è non degenere, allora esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che $\Phi|_W$ è il prodotto scalare nullo e $\dim W \geq \min(i_+(\Phi), i_-(\Phi))$.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

considerare il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^3$ dato da $g(x, y) = {}^t x M y$.

a) Trovare l'indice di Witt di g.

b) Determinare una decomposizione $\mathbb{R}^3 = W \oplus H$, dove H è una somma diretta di piani iperbolici e $g_{|W}$ è definito.

c) Trovare l'aggiunta f^* (rispetto a g) dell'endomorfismo f dato da $f(x, y, z) = (y, z + x, x + 2y)$.

Esercizio 6 (G2, VO)

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare con solo due autovalori $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ tali che $m(a) > m(b)$, dove $m(\lambda)$ è la molteplicità algebrica di λ.

a) Dimostrare che la molteplicità geometrica di b è 1.

b) Trovare il polinomio caratteristico di f.

c) Determinare i possibili polinomi minimi di f.

4) Dimostrare che, in tutti i casi, esisite un unico sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 f-invariante tale che la restrizione di f a W ha solo l'autovalore a.

Esercizio 7 (G2, VO)

Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ $eT' \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, t)$.

Determinare condizioni necessarie e/o sufficienti su t e a affinché esista una affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(T) = T'$ e $f(T') = T$. Tale f è unica?