ANNO ACCADEMICO 2002/2003

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II

Appello del 4/2/2003

Esercizio 1 [G1, G1+2, VO] Sia $V = \text{Span}\,((1,0,0,1),(0,2,1,1)) \subset \mathbb{R}^4$ e, per $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $W_\lambda \subset V$ il sottospazio definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x + 2z - w = 0 \\ \lambda x + 2y + 2\lambda z + w = 0 \\ x + 2\lambda y + 2z + \lambda w = 0 \end{cases}$$

1) Trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ non degenere tale che $V = W_\lambda^\perp$ e in tal caso costruirlo.

2) Rispondere alla stessa domanda richiedendo che Φ sia definito positivo.

Esercizio 2 [G1, G1+2, VO] Sia $B \in {}_n\mathbb{R}_n$ non diagonalizzabile tale che $B^3+3B^2 = 4I$.

1) Calcolare i possibili polinomi minimi di B e mostrare che B è invertibile.

2) Mostrare, costruendo un esempio, che per ogni polinomio $p(x)$ trovato al punto 1 esiste $B \in {}_4\mathbb{R}_4$ che ha $p(x)$ come polinomio minimo.

Esercizio 3 [G1] Su $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare φ definito da

$$\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Costruire, se esiste, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $\varphi(f(X),Y) = \varphi(X,f(Y))$ $\forall\ X,Y \in \mathbb{R}^3$, $\text{Ker}\,(f - id) = \text{Span}\,((-1,1,0))$ e $(0,1,0) \in \text{Im}\,(f)$.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; VO = Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [G1] Data la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 2a & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 2 & 1-2a & 1 \end{pmatrix}$$

1) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{C}$, la diagonalizzabilità di M_a.

2) Trovare, se esiste, una base di autovettori per M_0.

Esercizio 5 [G2, G1+2, VO] Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4 e sia $f : V \to V$ lineare tale che ogni autospazio di f ha dimensione uno ed esiste un unico sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2 tale che $f_{|W}$ sia diagonalizzabile.

1) Trovare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per f.

2) Mostrare che, in tutti i casi, esistono due sottospazi di dimensione 3 f-invarianti.

3) Mostrare che i sottospazi trovati al punto 2 sono gli unici sottospazi f-invarianti di dimensione 3.

Esercizio 6 [G2, G1+2, VO] Al variare di $a \in \mathbb{R}$, consideriamo il prodotto scalare Φ_a su $\mathbb{R}^3$ dato nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathrm{Iso}\,(\Phi_a)$ l'insieme dei vettori isotropi di Φ_a e $Z \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x + y = z$.

1) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è possibile rappresentare tramite Φ_a il funzionale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dato da $f(x, y, z) = x + y$?

2) Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica data da $\mathrm{Iso}\,(\Phi_a) \cap Z$.

Esercizio 7 [G2] Per $i = 1, 2$, siano dati in $\mathbb{R}^2$ i pentagoni P_i di vertici A_i, B_i, C_i, D_i, E_i tali che la retta per A_i e B_i è parallela alla retta per C_i e D_i, e la retta per B_i e C_i è parallela alla retta per A_i e E_i.

Dare condizioni sulle lunghezze dei lati dei pentagoni necessarie e sufficienti affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ che mandi P_1 in P_2.

ANNO ACCADEMICO 2002/2003

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II

Appello del 4/2/2003

Esercizio 1 [G1, G1+2, VO] Sia $V = \mathrm{Span}\,((1,0,0,1),(0,2,1,1)) \subset \mathbb{R}^4$ e, per $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $W_\lambda \subset V$ il sottospazio definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x + 2z - w = 0 \\ \lambda x + 2y + 2\lambda z + w = 0 \\ x + 2\lambda y + 2z + \lambda w = 0 \end{cases}$$

1) Trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste un prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^4$ non degenere tale che $V = W_\lambda^\perp$ e in tal caso costruirlo.

2) Rispondere alla stessa domanda richiedendo che Φ sia definito positivo.

Esercizio 2 [G1, G1+2, VO] Sia $B \in M(n, \mathbb{R})$ non diagonalizzabile tale che $B^3 + 3B^2 = 4I$.

1) Calcolare i possibili polinomi minimi di B e mostrare che B è invertibile.

2) Mostrare, costruendo un esempio, che per ogni polinomio $p(x)$ trovato al punto 1 esiste $B \in M(4, \mathbb{R})$ che ha $p(x)$ come polinomio minimo.

Esercizio 3 [G1] Su $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare φ definito da

$$\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Costruire, se esiste, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $\varphi(f(X),Y) = \varphi(X, f(Y))$ $\forall\ X,Y \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Ker}\,(f - id) = \mathrm{Span}\,((-1,1,0))$ e $(0,1,0) \in \mathrm{Im}\,(f)$.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; VO = Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [G1] Data la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 2a & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 2 & 1-2a & 1 \end{pmatrix}$$

1) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{C}$, la diagonalizzabilità di M_a.

2) Trovare, se esiste, una base di autovettori per M_0.

Esercizio 5 [G2, G1+2, VO] Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4 e sia $f : V \to V$ lineare tale che ogni autospazio di f ha dimensione uno ed esiste un unico sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2 tale che $f_{|W}$ sia diagonalizzabile.

1) Trovare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per f.

2) Mostrare che, in tutti i casi, esistono due sottospazi di dimensione 3 f-invarianti.

3) Mostrare che i sottospazi trovati al punto 2 sono gli unici sottospazi f-invarianti di dimensione 3.

Esercizio 6 [G2, G1+2, VO] Al variare di $a \in \mathbb{R}$, consideriamo il prodotto scalare Φ_a su $\mathbb{R}^3$ dato nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathrm{Iso}\,(\Phi_a)$ l'insieme dei vettori isotropi di Φ_a e $Z \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x + y = z$.

1) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è possibile rappresentare tramite Φ_a il funzionale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dato da $f(x, y, z) = x + y$?

2) Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica data da $\mathrm{Iso}\,(\Phi_a) \cap Z$.

Esercizio 7 [G2] Per $i = 1, 2$, siano dati in $\mathbb{R}^2$ i pentagoni P_i di vertici A_i, B_i, C_i, D_i, E_i tali che la retta per A_i e B_i è parallela alla retta per C_i e D_i, e la retta per B_i e C_i è parallela alla retta per A_i e E_i.

Dare condizioni sulle lunghezze dei lati dei pentagoni necessarie e sufficienti affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ che mandi P_1 in P_2.