GEOMETRIA DIFFERENZIALE 2021/22
ESERCIZI BISETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato svolgere gli esercizi a gruppi, purché alla fine ci sia una elaborazione e una scrittura totalmente individuale, e il lavoro di gruppo sia reso esplicito (basta aggiungere "ho fatto gli esercizi in collaborazione con XXX" nel testo). Si raccomanda di scrivere gli esercizi con cura: esercizi scritti in modo non chiaro non verranno corretti.

1. Esercizi del 2 ottobre

Esercizio 1.1. Siano X e Y due spazi topologici. La topologica prodotto su $X \times Y$ è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subset X \times Y$ è aperto se e solo se è unione arbitraria di sottoinsiemi $U \times V$ dove $U \subset X$ e $V \subset Y$ sono entrambi aperti. Mostra che questa è veramente una topologia su $X \times Y$.

Esercizio 1.2. Sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva da uno spazio topologico X su un insieme Y. La topologia quoziente su Y è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subset Y$ è aperto se e solo se la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta. Mostra che questa è veramente una topologia su X.

Esercizio 1.3. Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici. Mostra che f è continua se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $x \in X$ e per ogni intorno A di $f(x)$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un intorno di x.

Esercizio 1.4. Sia K uno spazio topologico compatto. Sia $C \subset K$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che C è compatto.

Esercizio 1.5. Mostra che il segmento $[0, 1]$ è connesso, usando solo la definizione di connesso (e nessun altro teorema: di solito questo fatto si mostra subito dopo la definizione).

Esercizio 1.6. Mostra che il sottoinsieme seguente in $\mathbb{R}^2$ è connesso ma non connesso per archi:

$$X = \big\{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\big\} \bigcup \big\{\big(x, \sin \tfrac{1}{x}\big) \mid x > 0\big\}.$$

Esercizio 1.7. Scrivi le funzioni di transizione di uno dei due atlanti che abbiamo scelto per S^n e vertifica che sono lisce.

Esercizio 1.8. Mostra che la mappa

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \qquad (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto [x_1, \dots, x_{n+1}]$$

è liscia.

Un *diffeomorfismo* è una mappa liscia $f\colon M \to N$ fra varietà lisce che ha una inversa, anch'essa liscia.

Esercizio 1.9. Costruisci due atlanti *non* compatibili per la varietà topologica $\mathbb{R}$. Mostra che però le due varietà lisce risultanti sono comunque diffeomorfe!

Esercizio 1.10. Mostra che $\mathbb{RP}^1$ e S^1 sono diffeomorfi.

2. Esercizi del 16 ottobre

Esercizio 2.1. Costruisci un embedding del toro n-dimensionale

$$S^1 \times \cdots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$. Guarda il caso $n = 2$ nel libro.

Un sottoinsieme Y di uno spazio topolgico X è *denso* se interseca qualsiasi aperto di X.

Esercizio 2.2. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$

è una immersione iniettiva ma non un embedding: l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$ e quindi non può essere una sottovarietà.

Esercizio 2.3. Sia $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.4. Sia $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ una sfera di dimensione dispari. Considera il campo vettoriale tangente su S^{2n-1}:

$$X(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1}).$$

Scrivi esplicitamente il flusso di questo campo e determina le sue linee integrali.

Esercizio 2.5. Siano X e Y due campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$. Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Esercizio 2.6. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 2.7. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 2.8. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

3. Esercizi del 13 novembre

I simboli U, V, W indicano sempre spazi vettoriali reali arbitrari di dimensione finita. Indichiamo con $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ lo spazio vettoriale formato da tutte le funzioni multilineari da $V_1, \ldots, V_k$ in W.

Esercizio 3.1. Mostra che l'isomorfismo canonico
$$\mathrm{Mult}(\underbrace{V, \ldots, V}_{k}; V) \longrightarrow \mathrm{Mult}(V^*, \underbrace{V, \ldots, V}_{k}; \mathbb{R}) = \mathcal{T}_1^k(V)$$
definito mandando $F \in \mathrm{Mult}(V, \ldots, V; V)$ nella mappa
$$(\mathbf{w}^*, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \longmapsto \mathbf{w}^*\big(F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\big)$$
è effettivamente un isomorfismo. Quindi un tensore $(1, k)$ può essere interpretato come una funzione multilineare $V \times \cdots \times V \to V$.

Esercizio 3.2. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V$ vettori non nulli. Mostra che se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono indipendenti allora $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}_2^0(V)$.

Un elemento di $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^*.

Esercizio 3.3. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V$ vettori non nulli. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono indipendenti, e anche $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono indipendenti, allora
$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}' \in \mathcal{T}_2^0(V)$$
non è un elemento puro.

Esercizio 3.4. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Mostra che tramite questo isomorfismo gli elementi puri sono mandati precisamente negli omomorfismi di rango ≤ 1.

Esercizio 3.5. Mostra che esiste un isomorfismo canonico
$$\mathrm{Mult}(U, V; W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)).$$

Esercizio 3.6. Mostra che ogni tensore T di tipo $(0, 2)$ può essere scritto in modo unico come somma di un tensore simmetrico e di un tensore antisimmetrico. Mostra che questo non è vero per i tensori di tipo $(0, k)$ con $k \geq 3$.

Indichiamo con $S(T)$ il tensore ottenuto simmetrizzando T.

Esercizio 3.7. Sia T un tensore di tipo $(0, k)$. Mostra che

- T è antisimmetrico $\Longleftrightarrow$ $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = 0$ se due dei vettori $\mathbf{v}_i$'s coincidono.
- $S(T) = 0 \Longleftrightarrow T(\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $v \in V$.

4. Esercizi del 27 novembre

Esercizio 4.1. Sia M una n-varietà, con atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n\}$. Un atlante per il fibrato tangente TM si costruisce nel modo seguente:

$$\{\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n\}.$$

Qui $\pi : TM \to M$ è la proiezione, indichiamo un punto di TM come una coppia (p, v) dove $p \in M$ e $v \in T_pM$, (quindi $\pi(p, v) = p$) e definiamo

$$\psi_i(p, v) = \big(\varphi_i, (d\varphi_i)_p(v)\big).$$

In questo modo TM è una $(2n)$-varietà. Mostra che l'atlante appena costruito per TM è sempre orientato. Quindi TM è sempre una varietà orientabile anche se M non lo è.

Esercizio 4.2. Sia M varietà qualsiasi e N varietà non orientabile. Il prodotto $M \times N$ può essere orientabile?

Esercizio 4.3. Sia S una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli. Mostra che il fibrato tangente è diffeomorfo a $S \times \mathbb{R}^2$

Esercizio 4.4. Mostra che il differenziale esterno è l'unica mappa lineare $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ tale che:

(1) coincide con il differenziale di funzioni per $k = 0$ (interpretando una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ come una 0-forma),
(2) $d(d\omega) = 0$ per ogni $\omega \in \Omega^k(M)$,
(3) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ per ogni $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$.

Esercizio 4.5. Mostra che $\mathbb{RP}^n$ è orientabile $\Longleftrightarrow$ n è dispari.

Esercizio 4.6. Mostra che una n-varietà M è orientabile $\Longleftrightarrow$ esiste una n-forma mai nulla su M.

Esercizio 4.7. Sia $f : M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che il prodotto wedge commuta con il pull-back:

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).$$

Esercizio 4.8. Si considerino gli isomorfismi

$$\phi_j : \Omega^j(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3),\ j = 0, 3, \quad \text{e} \quad \phi_k : \Omega^k(\mathbb{R}^3) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3),\ k = 1, 2,$$

definiti da

$$\begin{aligned} \phi_0(f) &= f, \\ \phi_1(f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3) &= (f_1, f_2, f_3), \\ \phi_2(f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^1 \wedge dx^3 + f_3 dx^1 \wedge dx^2) &= (f_1, -f_2, f_3), \\ \phi_3(f dx_1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= f. \end{aligned}$$

Dimostra le tre eguaglianze

$$\nabla = \phi_1 \circ d \circ \phi_0^{-1}, \quad \mathrm{rot} = \phi_2 \circ d \circ \phi_1^{-1}, \quad \mathrm{div} = \phi_3 \circ d \circ \phi_2^{-1},$$

dove i simboli ∇, rot e div denotano il gradiente, il rotore e la divergenza.

Esercizio 4.9. Sia $\varphi\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Mostra che il pull-back commuta con il differenziale, cioè:

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. □

Esercizio 4.10. Completa la dimostrazione fatta a lezione del teorema di Stokes mostrando che $i^*(dx^n) = 0$ se $i\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ è l'inclusione ovvia $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

5. Esercizi del 18 dicembre

Esercizio 5.1. Mostra che le nozioni di orientabilità e tempo-orientabilità sono indipendenti, costruendo una struttura lorentziana tempo-orientabile e una tempo-non orientabile sia sul nastro di Möbius che sull'anello $S^1 \times [0,1]$ (sono quindi quattro strutture in tutto). Puoi costruire queste strutture qualitativamente disegnando un cono di luce in T_pS che varia in modo liscio in $p \in S$ nei quattro casi (per risolvere l'esercizio sono sufficienti dei disegni convincenti, qui S è il nastro di Möbius o l'anello).

Esercizio 5.2. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:

$$H^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\big\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$

Qui g^E è il tensore euclideo e x_n è la n-esima coordinata di x. In altre parole

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che la varietà riemanniana H^n è *omogenea*, cioè per ogni coppia di punti $p, q \in H^n$ esiste una isometria che manda p in q.

Esercizio 5.3. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 5.4. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le *trasformazioni di Möbius*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

Esercizio 5.5. Costruisci una struttura Lorentziana sul toro $S^1 \times S^1$ che sia *omogenea*, cioè tale che per ogni coppia di punti $p, q \in H^n$ esista una isometria che manda p in q.

Esercizio 5.6. Considera un parallelo γ in S^2 (visualizzato in coordinate sferiche) con latitudine fissata $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sia v un vettore tangente ad un punto p di γ che punta verso il polo nord. Sia $v' \in T_pS^2$ ottenuto da v tramite trasporto parallelo lungo tutta la curva γ. Calcola l'angolo fra v e v' in funzione di φ.

Esercizio 5.7. Considera $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con le coordinate polari (ρ, θ). Determina il tensore metrico e i simboli di Christoffel in queste coordinate. Verifica che il tensore di Riemann è ovunque nullo (questo fatto deve valere rispetto a qualsiasi sistema di coordinate!).

Esercizio 5.8. Mostra che i simboli di Christoffel del piano iperbolico con il modello del semipiano H^2 sono i seguenti:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

Dopo aver fatto questi conti puoi guardare nel libro il modo in cui vengono determinate le geodetiche.

Esercizio 5.9. Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Calcola l'angolo fra v_t e l'asse delle ordinate (il risultato dipende da t). Deduci che γ non è una geodetica. Puoi usare i simboli di Christoffel di H^2 descritti nell'esercizio precedente senza calcolarli.

Esercizio 5.10. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = 1$$
$$\Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Determina le geodetiche di questa connessione.

Esercizio 5.11. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico $(B^n, \mathbf{g})$,

$$\mathbf{g}(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \mathbf{g}^E(x)$$

dove $\mathbf{g}^E$ è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} v.$$