Algebra – A. A. 2003-2004
Primo scritto

31 maggio 2004

COGNOME: NOME:

CORSO (A, B, C, o D): MATRICOLA:

FIRMA:

VALUTAZIONE

Esercizio 1 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 2 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 3 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 4 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo 4 vettori in $\mathbb{R}^4$ dipendenti da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \text{k} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \text{-1} \\ 3 \\ \text{-1} \\ \text{k+1} \end{pmatrix};$$

- calcolare $\dim\big(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)\big)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$;
- dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ i vettori (v_1, v_2, v_3, v_4) formano una base di $\mathbb{R}^4$;
- dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ esiste una applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà:

$$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

- dire per quale valore $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare come nel punto precedente, ma non è unica.

COGNOME: NOME:

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

COGNOME: NOME:

Esercizio 3 (9 punti). Consideriamo al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ la seguente matrice:

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & -1 & h \end{pmatrix};$$

- dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per cui A_h è invertibile;
- dire per quali valori $h \in \mathbb{R}$ la matrice A_h è diagonalizzabile.

COGNOME: NOME:

Esercizio 4 (9 punti). Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2y + (h-1)z & = & 1 \\ 2x - 4y + 3hz & = & h \\ -x + 2y + (h+5)z & = & 2 \end{cases}$$

ammette una, nessuna, o infinite soluzioni.