Algebra – A. A. 2003-2004
Quinto scritto

21 gennaio 2005

COGNOME: NOME:

CORSO (A, B, C, o D): MATRICOLA:

FIRMA:

VALUTAZIONE

Esercizio 1 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 2 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 3 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 4 . . . .

. . . .

. . . . Voto:

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo le seguenti funzioni f e g_a, con g_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+y,\ x,\ 2y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_a: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+ay,\ x+y,\ -2x+2y) \end{array}$$

1. Per quali $a \in \mathbb{R}$ abbiamo $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g_a$?
2. Trovare una base per $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g_a$ al variare di a.
3. Calcolare la dimensione di $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g_a$ al variare di a.

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 & y \\ y^{-1} & 0 & 0 & 0 & x^5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 (9 punti). Si consideri la seguente matrice, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 2 & 0 \\ t & 2 & 0 \\ t & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è invertibile ?
2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è diagonalizzabile ?

Esercizio 4 (9 punti). Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi in x su $\mathbb{R}$ di grado ≤ 3. Dati

$$\begin{aligned} f &= x^3 - 3x^2 + 5x + 1 \\ g &= x^3 - x^2 + 8x + 2 \\ h &= 2x^3 - 4x^2 + 9x + 5 \end{aligned}$$

1. Dire se f, g, h sono linearmente indipendenti in V.

2. Trovare tuttle le $a \in \mathbb{R}$ tali che i tre polinomi

$$af - \pi g + \sqrt{107}h, \quad h, \quad ag + g + 11^{21}h$$

siano linearmente indipendenti in V.