Algebra – A. A. 2003-2004
Quinto scritto

21 gennaio 2005

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo le seguenti funzioni f e g_a, con g_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+y,\ x,\ 2y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_a: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+ay,\ x+y,\ -2x+2y) \end{array}$$

1. Per quali $a \in \mathbb{R}$ abbiamo $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g_a$?
2. Trovare una base per $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g_a$ al variare di a.
3. Calcolare la dimensione di $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g_a$ al variare di a.

Abbiamo:

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathrm{Im} g_a = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathrm{Im}(f+g_a) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f+g_a)) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

è uguale a 3 per ogni $a \neq 3$ e uguale a 2 per $a = 3$. Quindi $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g_a = \mathrm{Im}(f+g_a)$ solo per $a = 3$, altrimenti $\mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Im} g_a$ si intersecano in una retta (per Grasmann), generata dal vettore $(1, 1, -2)$.

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 & y \\ y^{-1} & 0 & 0 & 0 & x^5 \end{bmatrix}$$

Sviluppando lungo la prima colonna viene $x^{15} + y^3$.

Esercizio 3 (9 punti). Si consideri la seguente matrice, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 2 & 0 \\ t & 2 & 0 \\ t & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è invertibile ?

   Mai, perché le prime due righe sono uguali, e quindi dipendenti.

2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è diagonalizzabile ?

   Il polinomio caratteristico è

   $$(2-\lambda)((2-\lambda)(t-\lambda)-2t) = (2-\lambda)(\lambda^2-(t+2)\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-(t+2))$$

   che ha soluzioni reali

   $$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = t+2.$$

   Per $t \neq 0, -2$ queste sono distinte e quindi A_t è diagonalizzabile. Altrimenti, valutando le molteplicità algebriche e geometriche si vede che A_0 è diagonalizzabile e A_{-2} non è diagonalizzabile.

Esercizio 4 (9 punti). Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi in x su $\mathbb{R}$ di grado ≤ 3. Dati

$$\begin{aligned} f &= x^3 - 3x^2 + 5x + 1 \\ g &= x^3 - x^2 + 8x + 2 \\ h &= 2x^3 - 4x^2 + 9x + 5 \end{aligned}$$

1. Dire se f, g, h sono linearmente indipendenti in V.

   La matrice 3×4 dei coefficienti ha rango 3, e quindi sono indipendenti.

2. Trovare tutte le $a \in \mathbb{R}$ tali che i tre polinomi

   $$af - \pi g + \sqrt{107}h, \quad h, \quad ag + g + 11^{21}h$$

   siano linearmente indipendenti in V.

   Le righe della matrice $\begin{pmatrix} a & -\pi & \sqrt{107} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 11^{21} \end{pmatrix}$ sono le coordinate dei tre polinomi rispetto a f, g, e h. La matrice ha determinante $-a(a+1)$ e quindi è invertibile se e solo se $a \neq 0, -1$. Quindi i tre polinomi sono indipendenti se e solo se $a \neq 0, -1$.