Esercizi di analisi complessa

Esercizio 1. Identifichiamo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Una funzione continua $f : \mathbb{P}^1(C) \to \mathbb{P}^1(C)$ è *meromorfa* se $f^{-1}(\infty)$ è un insieme finito e se la restrizione di f a $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\infty)$ è olomorfa.

Dimostrare che una funzione meromorfa è biunivoca se e solo se è una trasformazione di Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, per qualche $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera tale che $f^{-1}(z)$ è un insieme finito per ogni $z \in \mathbb{C}$. Mostrare che f è un polinomio.

Esercizio 3. Sia γ_r la curva $\gamma_r(t) = re^{2\pi it}$. Calcolare

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)^2} dz$$

per $r = 1/2$ e $r = 3/2$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Siano $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$ due punti. Sia X_{z_0,z_1} l'insieme di tutti gli archi continui $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ con $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$. Mostra che l'insieme

$$S_{z_0,z_1} = \left\{ \int_\gamma f(z) dz \mid \gamma \in X_{z_0,z_1} \right\}$$

è un sottoinsieme discreto di $\mathbb{C}$.

Esercizio 5. Sia $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ una successione di numeri reali con $0 \leqslant a_i \leqslant 1$. Si consideri l'insieme

$$K = \cup_{i\in\mathbb{Z}} \overline{\Delta(i, a_i)}$$

dove $\overline{\Delta(x,r)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-x| \leqslant r \right\}$.

Per quali successioni (a_i) esiste una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus K \to \Delta(0,1)$ non costante?