Corso di Geometria analitica e algebra lineare
9 gennaio 2008

Esercizio 1. Sia $\pi\colon \mathbb{Q}^4 \to Q^3$ l'applicazione lineare definita da $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ e al variare di $t \in \mathbb{Q}$ sia $V_t \subset \mathbb{Q}^4$ il sottospazio generato dai seguenti vettori:

$$\begin{pmatrix} t-2 \\ 4 \\ 1-t \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $g_t\colon V_t \to \mathbb{Q}^3$ la restrizione di π a V_t

(i) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{Q}$ l'applicazione g_t è un isomorfismo.

(ii) Per $t = 0$, scrivere equazioni cartesiane di V_0 e l'applicazione inversa $g_0^{-1}\colon \mathbb{Q}^3 \to V_0$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p \in V$ si ponga:

$$g_\lambda(p) = p(\lambda x + 1) - p'(x^2).$$

(i) Dimostrare che, fissato comunque $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \mapsto g_\lambda(p)$ è un endomorfismo di V;

(ii) al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ determinare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di g_λ;

(iii) per $\lambda = 2$ determinare una base di V rispetto alla quale la matrice associata all'applicazione sia in forma di Jordan.

Esercizio 3. Sia n un intero positivo, sia $V = M_n(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali di ordine n e sia A una matrice simmetrica di ordine n. Per $X, Y \in V$, si definisce:

$$B(X,Y) = Tr({}^tXAY).$$

(i) Dimostrare che B è una forma bilineare simmetrica su V;

(ii) Dimostrare che B è non degenere se e solo se la matrice A è invertibile;

(iii) Calcolare la segnatura di B nel caso in cui $n = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$