Corso di Geometria analitica e algebra lineare
13 febbraio 2008

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{Q}^3$ i seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e, al variare del parametro $t \in \mathbb{Q}$, i vettori:

$$w_{1,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_{2,t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t-3 \end{pmatrix}, \; w_{3,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ t-4 \end{pmatrix}, w_{4,t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{Q}$ esiste un' applicazione lineare $g_t \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ tale che $g_t(v_i) = w_{i,t}$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e se tale applicazione è unica.

(ii) Scegliere uno dei valori t_0 del parametro t determinati al punto precedente e un'applicazione g_{t_0} che verifichi le condizioni richieste e scrivere una base del nucleo e dell'immagine di g_{t_0}.

Esercizio 2.

Si considerino le seguenti matrici di $M(4, \mathbb{C})$, con $a, b \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3b & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$

(i) Dire per quali valori dei parametri $a.b \in \mathbb{C}$ le matrici A e B sono simili.

(ii) Sia $f \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'endomorfismo definito da $x \mapsto Ax$. Dire quanti sono i sottospazi $W \subset \mathbb{C}^4$ tali che $\dim W = 3$ e $f(W) \subset W$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n \geq 2$ e sia $B \colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su V. Supponiamo che esista $\bar{v} \in V$ tale che $B(\bar{v}, \bar{v}) > 0$.

Si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{I} = \{v \in V | B(v, v) = 0\}.$$

(i) Dimostrare che $\mathcal{I}$ è un sottospazio di V se e solo se B è semidefinita positiva.

(ii) Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}$ se e solo se la forma B è indefinita.