Esercizi di Geometria analitica e algebra lineare
Maggio 2008

Esercizio 1. Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare di segnatura $(2, 1, 0)$. Determinare le possibili segnature di un piano $W \subset R^3$ (cioè dire per quali terne (i_+, i_-, i_0) esiste un piano W tale che $b|_W$ abbia come segnatura questa terna).

Esercizio 2. Sia $b : V \times V \to K$ un prodotto scalare. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V. Supponiamo che i v_i siano tutti isotropi.

- Il prodotto b è necessariamente degenere?
- Se b è semidefinito positivo, b è necessariamente degenere?
- Se la base $\mathcal{B}$ è ortogonale, b è necessariamente degenere?

Esercizio 3. Sia b il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare la segnatura di b.
- Costruire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non nulla tale che $b(x, f(y)) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^4$.
- Mostrare che l'insieme

  $$\left\{ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \;\middle|\; b(x, f(y)) = 0 \;\forall x, y \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

  è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4. Sia b il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+1 \\ a+2 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$. Dire se esistono dei valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui b è definito positivo o definito negativo.

Esercizio 5. Sia $b : V \times V \to K$ un prodotto scalare. Sia $n = \dim V$. Dire se gli enunciati seguenti sono veri o falsi.

- b è non degenere se e solo se $\dim W^\perp = n-1$ per ogni sottospazio $W \subset V$ di dimensione 1.
- b è definito positivo oppure definito negativo se e solo se $W^\perp \cap W = \{e\}$ per ogni sottospazio $W \subset V$ di dimensione 1.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi reali di grado $\leqslant 2$. Dire se esiste un prodotto scalare b su V tale che

1. Il radicale di V sia il sottospazio generato da x,
2. $x+1$ e x^2+1 siano vettori isotropi
3. $b(x^2+4x+2, x^2+4x+2) = 2$.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}_4[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado $\leqslant 4$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$b(p,q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$

- Verificare che b è un prodotto scalare.
- Trovare una base del radicale di b.
- Calcolare la segnatura di b.
- Costruire una base ortogonale che contenga il vettore x^2+1.

Esercizio 8. Sia b_0 un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ e sia $V = \hom(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, si consideri l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$b(f,g) = b_0(f(v), g(v)).$$

- Verificare che b è un prodotto scalare su V.
- Determinare la segnatura di b.