Geometria Analitica e Algebra Lineare – A.A. 2007/2008
Compito scritto di Geometria Analitica e Algebra Lineare
16 gennaio 2009 — Soluzioni

Esercizio 1 (10 punti)
Si considerino, nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$, il piano

$$\pi = \begin{cases} z + t = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

e la retta

$$r = \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Si determinino equazioni cartesiane di una retta s che interseca sia π che r, e tale che il vettore $v = (1, -1, 0, 1)$ genera la giacitura di s.

Soluzione. Possiamo evidentemente assumere che la retta cercata sia della forma $s = P + \langle v \rangle$, con $P \in r$. È immediato ricavare che ogni punto di r ha coordinate del tipo $(-2\lambda, -2\lambda - 1, 3\lambda + 1, \lambda)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi ogni punto $Q \in s$ è del tipo $(-2\lambda + \mu, -2\lambda - 1 - \mu, 3\lambda + 1, \lambda + \mu)$, per qualche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Imponendo $Q \in s \cap \pi$ si ottiene $\lambda = -1$, $\mu = 4$, quindi $P = (2, 1, -2, 1)$, e si verifica facilmente che s è individuata dalle equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + t = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 2 (10 punti)
Si consideri, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice a coefficienti complessi

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini:

(1) la forma canonica di Jordan di A_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$;
(2) la forma canonica di Jordan di $(A_\lambda)^n$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni intero $n \geq 2$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $A(\lambda)$ risulta $p_{A(\lambda)}(t) = (t-(\lambda+1))(t-\lambda)^2$. Quindi la forma canonica di Jordan di $A(\lambda)$ è del tipo $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a(\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$, con $a(\lambda) \in \{0, 1\}$. Poiché la matrice $\lambda I - A(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango due, si ha $a(\lambda) = 1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. È facile dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ l'operatore $A(\lambda)^n$ ha, in una base opportuna, matrice $\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^n \end{pmatrix}$. Da questo segue subito, ragionando per blocchi, che per $n \geq 2$ la forma canonica di A^n_λ è uguale a $\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 1 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^n \end{pmatrix}$ per $\lambda \neq 0$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per $\lambda = 0$.

Esercizio 3 (10 punti)
Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard. Sia $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ la base canonica e siano

$$l = \{e_1 + te_2 \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad m = \{(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(1, 2, 1) \mid s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Costruire una trasformazione ortogonale $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(l) = m$ e determinare la matrice associata ad f tramite la base canonica.

Soluzione. Abbiamo $e_1 = e_1 + 0 \cdot e_2 \in l$ e $\|e_1\| = 1$. Analogamente,

$$w = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 2, 1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \in m,$$

e $\|w\| = 1$. Sia U una trasformazione ortogonale tale che $U(e_1) = w$. Poiché evidentemente

$$m = \{w + (s - \frac{\sqrt{2}}{2})(1, 2, 1) \mid s \in \mathbb{R}\},$$

è sufficiente che $U(e_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$ per avere $U(l) = m$. Infatti in tal caso, per linearità di U,

$$U(l) = \{U(e_1) + tU(e_2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{w + \frac{t}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = m.$$

Quindi come f possiamo scegliere l'applicazione lineare determinata dalla matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$