Geometria e topologia differenziale

Teoria del grado (alcune dimostrazioni)

Queste note contengono alcuni fatti che non sono dimostrati pienamente nel libro di Milnor. Attenzione: le note non sono esaustive; molti argomenti fatti a lezione non sono descritti qui.

Proiezioni locali Dati $m \geqslant n$, consideriamo la proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sulle prime coordinate:

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Sia $f\colon M \to N$ mappa liscia fra varietà senza bordo di dimensione $m \geqslant n$. Sia $x \in M$ un punto regolare per f e $y = f(x)$ la sua immagine. La proposizione seguente dice che vicino ad x la mappa f è sempre una proiezione (su carte opportune):

Proposizione 1. *Esistono due intorni aperti $U(x) \subset M$ e $V(y) \subset N$ di x e y e due diffeomorphismi*

$$F\colon U(x) \to \mathbb{R}^m, \quad G\colon V(y) \to \mathbb{R}^n$$

tali che $f(U(x)) = V(y)$ ed il diagramma seguente commuta:

$$\begin{tikzcd} U(x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & V(y) \arrow[d, "G"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Proof. La dimostrazione è contenuta nella dimostrazione che la controimmagine di un valore regolare è una varietà. □

Varietà a bordo. Indichiamo con $H^m \subset \mathbb{R}^m$ il semispazio con ultima coordinata $x_m \geqslant 0$. Definiamo inoltre $\partial H^m = \{x_m = 0\}$.

Definizione 1. Un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è una *m-varietà liscia con bordo* se ogni $x \in X$ ha un intorno aperto $U(x)$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $X \cap U$ sia diffeomorfo ad un aperto di H^m.

Un punto $x \in X$ è *di bordo* se corrisponde ad un punto di ∂H^m tramite questi diffeomorfismi. I punti di bordo di X vengono indicati con ∂X. I punti in $X \setminus \partial X$ si dicono *interni*.

Osservazione 1 (Pignoleria)**.** La definizione di punto di bordo è ben posta: non possono esistere due diffeomorfismi

$$\varphi\colon X \cap U \longrightarrow V_1, \quad \psi\colon X \cap U \longrightarrow V_2$$

con V_1, V_2 aperti in H^n, tali che $\varphi(x) \in \partial H^n$ ma $\psi(x) \notin \partial H^n$.

Se esistessero, la composizione $\varphi \circ \psi^{-1}\colon V_2 \to V_1$ fornirebbe localmente un diffeomorfismo fra un aperto ed un non-aperto di $\mathbb{R}^n$. Questo è assurdo: per il teorema di invertibilità locale la mappa $\varphi \circ \psi^{-1}\colon V_2 \to \mathbb{R}^m$ è aperta.

Proposizione 2. *Il bordo ∂X è una $(m-1)$-varietà senza bordo.*

Proof. Poiché è una proprietà locale, basta dimostrarlo nel caso $X = H^m$, in cui $\partial H^m = \{x_m = 0\}$ è un iperpiano (quindi una $(m-1)$-varietà). □

Vogliamo definire lo spazio tangente T_xX per i punti di bordo $x \in \partial X$. Se definiamo T_xX come classe di equivalenza di mappe $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ con $\alpha(0) = \varepsilon$ come fatto per le varietà senza bordo, otteniamo in realtà soltanto lo spazio tangente $T_x(\partial X)$ del bordo, che ha dimensione $m-1$. Per i nostri scopi è però conveniente che lo spazio tangente T_xX abbia sempre la stessa dimensione m al variare di $x \in X$: definiamo quindi lo spazio tangente T_xX come lo span lineare di tutti i vettori $\alpha'(0)$ al variare delle curve lisce $\alpha\colon [0, \varepsilon) \to X$. Guardando H^m si capisce subito che se $x \in \partial X$ allora questi vettori formano un semispazio e generano quindi uno spazio di dimensione m.

Costruzioni Con questo lemma si costruiscono molti esempi.

Lemma 1. *Sia M una n-varietà senza bordo e $g\colon M \to \mathbb{R}$ una funzione liscia. Se 0 è valore regolare per g, allora il luogo dei punti $x \in M$ con $g(x) \geqslant 0$ è una n-varietà liscia, il cui bordo è precisamente $g^{-1}(0)$.*

Proof. Sia x tale che $g(x) \geqslant 0$. Se $g(x) > 0$, allora esiste un intorno aperto $U(x)$ in cui $g(y) > 0$ per ogni $y \in U(x)$. Quindi l'intorno $U(x)$ è interamente contenuto in $g^{-1}\big([0, +\infty)\big)$ e siamo a posto.

Se $g(x) = 0$, poiché x è valore regolare, la mappa g letta su carte opportune è localmente una proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_1.$$

L'insieme $g^{-1}\big([0, +\infty)\big)$ è proprio il semispazio H^n ed il bordo è proprio la controimmagine di 0. □

Controimmagini Sia M una m-varietà con bordo e N una n-varietà senza bordo, con $m > n$.

Lemma 2. *Sia $f\colon M \to N$ mappa liscia e $y \in N$ valore regolare sia per f che per $f|_{\partial M}$. Allora l'insieme $f^{-1}(y)$ è una $(m-n)$-varietà con bordo. Il bordo $\partial f^{-1}(y)$ coincide con $f^{-1}(y) \cap \partial M$.*

Proof. Visto che la questione è locale, è sufficiente considerare il caso di una mappa $f\colon H^m \to \mathbb{R}^n$. Prendiamo $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Se $\bar{x}$ è un punto interno la dimostrazione funziona come nel caso senza bordo e mostra che $f^{-1}(y)$ vicino a $\bar{x}$ è una varietà (senza bordo).

Ci resta da considerare il caso $\bar{x} \in \partial H^m = \{x_m = 0\}$. Sia $g\colon U \to \mathbb{R}$ una estensione liscia della mappa f, definita in un intorno U di $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^n$. Sappiamo che f è regolare in x, quindi anche g lo è (hanno lo stesso differenziale in x). Poiché la regolarità è una proprietà aperta, a meno di scegliere U più piccolo possiamo supporre che g sia ovunque regolare in U.

Per il teorema già visto nel caso senza bordo, la controimmagine $g^{-1}(y)$ è una $(m-n)$-varietà. Consideriamo adesso la proiezione sull'ultima coordinata:

$$\pi\colon (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto x_m.$$

Notiamo che

$$f^{-1}(y) \cap U = g^{-1}(y) \cap \pi^{-1}\big([0, +\infty)\big).$$

Se dimostriamo che la funzione $\pi|_{g^{-1}(y)}$ è regolare in $\bar{x}$ siamo a posto: a meno di sostituire U con un aperto più piccolo, la funzione $\pi|_{g^{-1}(y)}$ è regolare su tutto $g^{-1}(y)$ e 0 è un valore regolare. Il Lemma 1 applicato alla varietà $g^{-1}(y)$ e alla funzione $\pi|_{g^{-1}(y)}$ implica quindi che

$$f^{-1}(y) \cap U = \left(\pi|_{g^{-1}(y)}\right)^{-1}([0, \infty))$$

è varietà con bordo, il cui bordo è precisamente $f^{-1}(y) \cap \partial H^m$.

Per dimostrare che $\pi|_{g^{-1}(y)}$ è regolare in $\bar{x}$ usiamo il fatto che y è regolare anche per la restrizione

$$f|_{\partial H^m}\colon \partial H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Questa mappa manda una $(m-1)$-varietà in una n-varietà: la regolarità di y implica quindi che $\ker d\big(f|_{\partial H^m}\big)_{\bar{x}}$ ha dimensione $(m-1)-n$. Notiamo che

$$\begin{aligned}
\ker d\big(\pi|_{g^{-1}(y)}\big)_{\bar{x}} &= \big(T_{\bar{x}} g^{-1}(y)\big) \cap \{x_n = 0\} \\
&= \ker dg_{\bar{x}} \cap \{x_n = 0\} \\
&= \ker df_{\bar{x}} \cap \{x_n = 0\} \\
&= \ker d\big(f|_{\partial H^m}\big)_{\bar{x}}.
\end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$\dim \ker d\big(\pi|_{g^{-1}(y)}\big)_{\bar{x}} = m - n - 1. \tag{1}$$

La mappa $\pi|_{g^{-1}(y)}$ manda una $(m-n)$-varietà in $\mathbb{R}$. L'uguaglianza (1) implica che il suo differenziale in $\bar{x}$ è suriettivo e la mappa è regolare in $\bar{x}$. $\square$

Funzioni a campana. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una *funzione a campana*

$$\rho\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

liscia tale che $\rho(0) = 1$, $\rho(x) < 1$ per ogni $x \neq 0$ e $\rho(x) = 0$ per ogni $\|x\| \geqslant \varepsilon$. Ad esempio per $n = 1$ possiamo definire ρ come la funzione che vale

$$\rho(x) = Ce^{-\frac{1}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}}$$

dentro l'intervallo aperto $|x| < \varepsilon$ ed è costantemente nulla fuori, con $C > 0$ scelto in modo che $\rho(0) = 1$, cioè $C = e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$. Per n generico è sufficiente definire

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = \rho(nx_1) \cdots \rho(nx_n).$$

Notiamo infatti che se $\|x\| \geqslant \varepsilon$ allora esiste un indice i tale che $|x_i| \geqslant \frac{\varepsilon}{n}$ e quindi $\rho(nx_i) = 0$.

Omogeneità. Indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^n$ il disco unitario

$$D = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

In quanto segue tutte le isotopie sono supposte lisce.

Lemma 3 (Omogeneità locale)**.** *Esiste un intorno $U \subset D$ dell'origine in $\mathbb{R}^n$ per cui vale il fatto seguente: per ogni $p \in U$ esiste una isotopia di diffeomorfismi $h_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che:*

- $h_0(x) = x$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$,
- $h_1(0) = p$,
- $h_t(x) = x$ *per ogni* $t \in [0, 1]$ *e ogni* $\|x\| \geqslant 1$.

Dimostrazione. Fissiamo una funzione liscia a campana $\rho \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\rho(0) = 1$ e $\rho(x) = 0$ per ogni $|x| \geqslant \frac{1}{2}$. La derivata $\rho'(x)$ si annulla fuori dal compatto $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, quindi ha un massimo globale $M > 0$.

Svolgiamo prima il caso $n = 1$. Definiamo U come l'intervallo $U = (-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$ e mostriamo che U soddisfa la tesi del lemma. Dato un punto $p \in U$ qualsiasi definiamo la mappa $h_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$h_t(x) = x + t\rho(x)p.$$

Otteniamo $h_0 = \mathrm{id}$, $h_1(0) = p$ e $h(x) = x$ per ogni $|x| \geqslant 1$. Inoltre notiamo che

$$h_t'(x) = 1 + t\rho'(x)p > 0$$

per ogni $t \in [0, 1]$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ perché $|t\rho'(x)p| < 1 \cdot M \cdot \frac{1}{M} = 1$. La funzione liscia h_t ha derivata ovunque positiva ed è suriettiva: quindi è un diffeomorfismo. Abbiamo concluso il caso $n = 1$.

Estendiamo adesso il ragionamento al caso n generico. Definiamo $U \subset \mathbb{R}^n$ come il disco aperto $\|x\| < \frac{1}{M}$ in $\mathbb{R}^n$ e mostriamo che U soddisfa la tesi del lemma. Per ogni punto $p \in U$, costruiamo un diffeomorfismo che manda 0 in p isotopo all'identità. Scriviamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ e con una rotazione possiamo supporre $p = (p_1, 0)$.

Fissiamo un'altra funzione a campana $\sigma\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tale che $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(y) = 0$ per ogni $\|y\| \geqslant \frac{1}{2}$. Definiamo

$$h_t(x, y) = (x + t\sigma(y)\rho(x)p_1, y).$$

Otteniamo $h_0 = \mathrm{id}$, $h_1(0, 0) = p$ e anche $h_t(x, y) = (x, y)$ per ogni $\|(x, y)\| \geqslant 1$, perché quest'ultima condizione implica $\|x\| \geqslant \frac{1}{2}$ oppure $\|y\| \geqslant \frac{1}{2}$ e quindi $\sigma(y)\rho(x) = 0$. La derivata parziale

$$\frac{\partial h_t}{\partial x} = 1 + t\sigma(y)\rho'(x)p_1$$

è sempre positiva perché $|t\sigma(y)\rho'(x)z_1| < 1 \cdot 1 \cdot M \cdot \frac{1}{M} = 1$. Quindi h_t induce un diffeomorfismo su ogni linea $y =$ costante. Quindi h_t è una bigezione e resta da controllare che la sua inversa sia liscia. Il suo differenziale in $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + t\sigma(y)\rho'(x)z_1 & ? \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

che ha determinante non nullo ed è quindi invertibile. Dal teorema di invertibilità locale segue che f_t ha localmente una inversa liscia, quindi l'inversa di f_t è ovunque liscia. $\square$