ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2016/17

COMPITO 9 FEBBRAIO 2018

Esercizio 1 (8 punti)**.** Siano $k, m, n > 0$ interi con $k \leq m, n$. Sia $M(m, n)$ lo spazio delle matrici $m \times n$.

(1) Mostra che il sottoinsieme di $M(m, n)$ formato dalle matrici di rango almeno k è una sotto varietà liscia di $M(m, n)$.
(2) Mostra che il sottoinsieme di $M(m, n)$ formato dalle matrici di rango esattamente k è una sotto varietà liscia di $M(m, n)$.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Considera la distribuzione di piani D in $\mathbb{R}^3$ generati dai campi vettoriali

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

(1) La distribuzione D è involutiva?
(2) Esiste una superficie in $\mathbb{R}^3$ ovunque tangente a D e passante per l'origine?

Esercizio 3 (8 punti)**.** Sia $X \in S^2$ un sottoinsieme formato da tre punti distinti. Calcola i numeri di Betti della varietà

$$M = (S^2 \setminus X) \times (S^2 \setminus X).$$

Esiste una 3-varietà compatta orientabile e senza bordo omotopicamente equivalente a M?

Esercizio 4 (8 punti)**.** Considera la varietà riemanniana

$$H^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\big\}, \quad g = \frac{1}{x_n^2} g^E.$$

(1) Calcola i simboli di Christoffel in ogni punto.
(2) Calcola il tensore di Riemann in ogni punto.
(3) Calcola le curvature sezionali in ogni punto rispetto ai piani coordinati (cioè generati da e_i, e_j).

L'esercizio svolto nel caso $n = 2$ vale 6 punti.