

## ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2024/25 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

### 1. Esercizi del 28 febbraio

**Esercizio 1.1.** Costruisci due atlanti lisci non compatibili su  $\mathbb{R}$ . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione  $n \leq 3$  sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione  $n \geq 4$ .)

**Esercizio 1.2.** Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  due atlanti lisci su una varietà topologica  $M$ . Mostra che sono fatti equivalenti:

- (1)  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  sono compatibili
- (2) per ogni aperto  $U \subset M$ , le restrizioni  $\mathcal{A}|_U$  e  $\mathcal{A}'|_U$  sono compatibili
- (3) ogni  $x \in M$  ha un intorno  $U = U(x)$  su cui  $\mathcal{A}|_U$  e  $\mathcal{A}'|_U$  sono compatibili

**Esercizio 1.3.** Sia  $U \subset M$  un aperto in una varietà liscia  $M$ . Mostra che un omeomorfismo  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una carta compatibile con la struttura liscia di  $M$  se e solo se è un diffeomorfismo.

**Esercizio 1.4.** Per ogni  $0 < k < n$ , la *Grassmanniana affine*  $\text{Grass}_k(\mathbb{R}^n)$  è l'insieme dei sottospazi affini di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $k$ . Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme  $\text{Grass}_k(\mathbb{R}^n)$ , in modo che venga connessa e la mappa naturale  $\text{Grass}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  che assegna ad ogni sottospazio affine la sua giacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

**Esercizio 1.5.** Considera il gruppo  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z), \\ h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

**Esercizio 1.6.** Considera il gruppo  $\Gamma < \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$  generato da

$$f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y).$$

Mostra che  $\Gamma$  non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Mostra che la mappa  $M \rightarrow M/\Gamma$  è comunque un rivestimento, ed il quoziente  $M/\Gamma$  è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , ma non è di Hausdorff!).

**Esercizio 1.7.** Mostra che la funzione costruita a lezione  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  è un diffeomorfismo.

### 2. Esercizi del 7 marzo

**Esercizio 2.1.** Sia  $f: \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che  $f$  è un embedding.

**Esercizio 2.2.** Sia  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$  polinomio di grado  $d \geq 1$ . Considera l'insieme  $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$ . Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado  $d$ .

**Esercizio 2.3.** Sia  $M$  compatta e  $N$  connessa. Se  $\dim M = \dim N$ , mostra che ogni embedding  $M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo.

**Esercizio 2.4.** Siano  $p, q$  due numeri reali con  $\frac{p}{q}$  irrazionale. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$

è una immersione iniettiva ma non un embedding. Mostra che l'immagine è densa in  $S^1 \times S^1$ .

**Esercizio 2.5.** Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se  $M$  è compatta allora non esistono sommersioni  $M \rightarrow \mathbb{R}^k$  per nessun  $k$ .

**Esercizio 2.6.** Mostra che per ogni varietà liscia  $M$  esiste una funzione propria  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

**Esercizio 2.7.** Siano  $S_0, S_1 \subset M$  due chiusi disgiunti in una varietà liscia  $M$ . Mostra che esiste una funzione liscia  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(S_i) = i$  per  $i = 0, 1$  e  $f(x) \in (0, 1)$  per ogni  $x \in M \setminus (S_0 \cup S_1)$ .

### 3. Esercizi del 14 marzo

Negli esercizi seguenti  $V$  è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ . Un elemento di  $\mathcal{T}_h^k(V)$  è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di  $h$  vettori di  $V$  e  $k$  covettori di  $V^*$ .

**Esercizio 3.1.** Siano  $v, v', w, w' \in V^*$  covettori non nulli.

- (1) Se  $v$  e  $v'$  sono indipendenti, allora  $v \otimes w$  e  $v' \otimes w'$  sono vettori indipendenti in  $\mathcal{T}^2(V)$ .

(2) Se inoltre anche  $w$  e  $w'$  sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

**Esercizio 3.2.** Considera l'isomorfismo canonico  $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{Hom}(V, V)$ . Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango  $\leq 1$ .

**Esercizio 3.3.** Siano  $v_1, \dots, v_n$  base di  $V$  e  $v^1, \dots, v^n$  base duale di  $V^*$ . Mostra il fatto seguente enunciato a lezione: una base per  $\Lambda^k(V)$  è data dagli elementi

$$v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}$$

con  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

**Esercizio 3.4.** Siano  $v^1, \dots, v^k \in V^*$ . Mostra che questi vettori sono indipendenti  $\iff v^1 \wedge \dots \wedge v^k \neq 0$ .

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge*.

**Esercizio 3.5.** Dato un elemento non nullo  $\alpha \in \Lambda^k(V)$  con  $k \leq n$ , mostra che esiste sempre un  $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$  tale che  $\alpha \wedge \beta \neq 0$  in  $\Lambda^n(V)$ .

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che  $\dim \Lambda^n(V) = 1$ .

**Esercizio 3.6.** Sia  $\langle, \rangle$  un prodotto scalare su  $V$ . Mostra che esiste un unico prodotto scalare  $\langle, \rangle$  su  $\Lambda^k(V)$  tale che

$$\langle v^1 \wedge \dots \wedge v^k, w^1 \wedge \dots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$

per qualsiasi scelta di covettori  $v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^k \in V^*$ . Qui  $\det \langle v^i, w^j \rangle$  indica il determinante della matrice  $k \times k$  il cui elemento  $i, j$  è  $\langle v^i, w^j \rangle$ . Mostra che se il prodotto  $\langle, \rangle$  su  $V$  è definito positivo allora anche quello indotto su  $\Lambda^k(V)$  lo è.

**Esercizio 3.7.** Sia  $V$  dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia  $\omega \in \Lambda^n(V)$  un generatore, normalizzato in modo che

$$\langle \omega, \omega \rangle = 1.$$

L'*operatore stella di Hodge* è la mappa lineare

$$*: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda  $\beta \in \Lambda^k(V)$  nell'unico  $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$  per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni  $\alpha \in \Lambda^k(V)$ . Usando gli esercizi precedenti, mostra che

- (1) La mappa  $*$  è ben definita.
- (2) Se  $v^1, \dots, v^n$  è una base positiva ortonormale per  $V^*$ , allora

$$*(v^1 \wedge \dots \wedge v^k) = v^{k+1} \wedge \dots \wedge v^n.$$

- (3) La mappa  $*$  è una isometria.
- (4) Vale  $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$  per ogni  $\beta \in \Lambda^k(V)$ .

#### 4. Esercizi del 21 marzo

**Esercizio 4.1.** Ricordiamo che  $\mathbb{R}P^n$  è l'insieme delle rette vettoriali  $l$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che  $E$  è una sottovarietà liscia di  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  e che la mappa  $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ,  $(l, v) \mapsto l$  è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

**Esercizio 4.2.** Mostra che il fibrato tangente  $TM$  di una varietà  $M$  è sempre orientabile, anche se  $M$  non lo è.

**Esercizio 4.3.** Sia  $E \rightarrow M$  un fibrato vettoriale e  $S \subset M$  un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su  $S$  si estende ad una sezione globale su  $M$  (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni  $S \rightarrow \mathbb{R}^k$ ).

**Esercizio 4.4.** Siano  $X, Y$  due campi vettoriali in un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

**Esercizio 4.5.** Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali  $X, Y, Z$  su una varietà  $M$ , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

**Esercizio 4.6.** Data una matrice quadrata  $A$ , sia  $X_A$  il campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$  dato da  $X_A(x) = Ax$ . Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

**Esercizio 4.7.** Sia  $M$  una varietà, siano  $X, Y$  campi vettoriali su  $M$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ . Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

## 5. Esercizi del 28 marzo

**Esercizio 5.1.** Mostra che una distribuzione  $D$  di rango 1 in una varietà  $M$  è sempre integrabile.

**Esercizio 5.2.** Sia  $M$  varietà dotata di una struttura Riemanniana  $g$ , cioè  $g$  è un campo tensoriale  $(0, 2)$  su  $TM$  simmetrico e definito positivo ovunque. Se una distribuzione  $D$  è integrabile, la distribuzione ortogonale  $D^\perp$  è sempre integrabile? La distribuzione ortogonale è definita in modo ovvio come  $(D^\perp)_p = (D_p)^\perp$  per ogni  $p$ . (Se la risposta è sì dimostrarlo, se è no esibisci un controesempio.)

**Esercizio 5.3.** Siano  $X, Y$  campi vettoriali in una varietà  $M$ . Mostra che

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

Questa è un'uguaglianza fra operatori su  $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$ . Il bracket  $[A, B]$  di due operatori  $A, B$  è per definizione  $[A, B] = AB - BA$ . Qui  $\mathcal{L}_X$  è la derivata di Lie lungo  $X$ . Nota che se  $(h, k) = (1, 0)$  questo è equivalente all'identità di Jacobi sui campi vettoriali. Questa uguaglianza può essere enunciata dicendo che la derivata di Lie fornisce un omomorfismo di algebre di Lie da  $\mathfrak{X}(M)$  nell'algebra di Lie degli operatori su  $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$ .

**Esercizio 5.4.** Considera su  $\mathbb{R}^3$ , con coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$ , una generica distribuzione di piani

$$D_x = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}.$$

Considera il campo  $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Mostra che la distribuzione è integrabile se e solo se

$$X \cdot \text{rot}X = 0$$

in ogni punto. Qui  $\text{rot}X$  indica il rotore di  $X$ .

**Esercizio 5.5.** Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di  $SO(3)$  sono l'identità,  $SO(3)$ , e i sottogruppi isomorfi a  $S^1$  che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

**Esercizio 5.6.** Mostra che le classi di coniugio di quaternioni non reali formano una foliazione in sfere di  $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ .

**Esercizio 5.7.** Sia  $T_{12} < SO(3)$  il sottogruppo delle isometrie che preservano l'orientazione di un tetraedro regolare fissato in  $\mathbb{R}^3$  con baricentro nell'origine. La controimmagine  $T_{24}^* < S^3$  attraverso il rivestimento doppio  $S^3 \rightarrow SO(3)$  è un sottogruppo di ordine 24 detto *gruppo tetraedrale binario*. Mostra che l'involuppo convesso di  $T_{24}^*$  in  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  è un politopo regolare in  $\mathbb{R}^4$ , detto *24-celle*. Descrivi le 24 facce di questo politopo (il 24-celle è l'unico politopo regolare *autoduale* in ogni dimensione  $n$  che non sia un simpleso: ha tante facce quanti vertici).

Mostra che l'azione del sottogruppo  $T_{24}^*$  su  $S^3$  per moltiplicazione a sinistra è libera e propriamente discontinua, quindi  $S^3/T_{24}^*$  è una 3-varietà. Sai individuare un dominio fondamentale per l'azione di  $T_{24}^*$  su  $S^3$ ?

(In modo simile ma più complicato la controimmagine del gruppo  $I_{60}$  delle isometrie che preservano l'orientazione di un icosaedro o dodecaedro è un gruppo  $I_{120}^*$  di ordine 120 il cui involuppo convesso è il politopo regolare chiamato *600-celle*. Inoltre  $I_{120}^*$  è un gruppo perfetto, ed il quoziente  $S^3/I_{120}^*$  è una 3-varietà con gruppo fondamentale finito  $I_{120}^*$  perfetto, nota come *sfera di Poincaré*.)

## 6. Esercizi del 4 aprile

**Esercizio 6.1.** Mostra che una  $n$ -varietà  $M$  è orientabile  $\iff$  esiste una  $n$ -forma mai nulla su  $M$ .

**Esercizio 6.2.** Sia  $f: M \rightarrow N$  una mappa liscia fra varietà. Siano  $\omega \in \Omega^k(N)$  e  $\eta \in \Omega^h(N)$ . Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

**Esercizio 6.3.** Sia  $\varphi: M \rightarrow N$  una mappa liscia fra varietà e  $\omega \in \Omega^k(N)$ . Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

*Suggerimento.* Mostra il teorema nel caso in cui  $\omega = f$  sia una funzione e nel caso in cui  $\omega = dg$  sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di  $d$  rispetto alle operazioni  $+$  e  $\wedge$ .  $\square$

**Esercizio 6.4.** Sia  $\omega \in \Omega^1(M)$  una 1-forma su una varietà  $M$  senza bordo. Supponiamo che  $\omega$  sia chiusa (cioè  $d\omega = 0$ ) e mai nulla. Poiché  $\omega(p) \neq 0$  per ogni  $p \in M$ , il funzionale  $\omega(p): T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che  $D$  è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su  $M$ .

**Esercizio 6.5.** Sia  $D$  una distribuzione di piani in una 3-varietà  $M$  senza bordo. Mostra che  $D$  è integrabile  $\iff$  per ogni 1-forma  $\alpha$  mai nulla definita su un aperto di  $M$  avente  $\ker \alpha = D$  abbiamo  $\alpha \wedge d\alpha = 0$ .

Una *forma simplettica* su una varietà  $N$  è una 2-forma  $\omega \in \Omega^2(M)$  che è chiusa (cioè  $d\omega = 0$ ) e *non-degenere*, cioè per ogni  $p \in M$  e per ogni  $v \in T_pM$  esiste  $w \in T_pM$  tale che  $\omega(p)(v, w) \neq 0$ .

**Esercizio 6.6.** Mostra i fatti seguenti:

- (1) Se  $\omega$  è una forma simplettica su  $N$ , allora  $N$  ha dimensione pari.
- (2) Costruisci una forma simplettica su  $\mathbb{R}^{2n}$  e sul toro  $2n$ -dimensionale.

- (3) Sia  $\pi: T^*M \rightarrow M$  il fibrato cotangente di una varietà  $M$  di dimensione  $n$ . Nota che  $T^*M$  è una varietà di dimensione  $2n$ . La *1-forma tautologica*  $\theta \in \Omega^1(T^*M)$  sulla varietà  $T^*M$  è definita nel modo seguente: un punto  $\alpha \in T^*M$  è per definizione un funzionale  $\alpha: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  con  $p = \pi(\alpha)$ . Sia  $v \in T_\alpha(T^*M)$ . Poniamo

$$\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$

Mostra che  $d\theta$  è una forma simplettica su  $T^*M$ .

- (4) Mostra che se  $\omega$  è una forma simplettica su  $N$  allora esiste un'orientazione su  $N$  per cui  $\omega \wedge \dots \wedge \omega$  è una forma volume.

**Esercizio 6.7.** Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

### 7. Esercizi dell' 11 aprile

**Esercizio 7.1.** Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia  $M = U \cup V$  varietà con  $U, V$  aperti. Supponiamo che i numeri di Betti di  $U \cap V, U, V, M$  siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

**Esercizio 7.2.** Calcola i numeri di Betti della superficie  $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$  e della superficie  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Esercizio 7.3.** Sia  $M$  una varietà orientabile e senza bordo. Mostra che

$$b_c^{k+h}(M \times \mathbb{R}^h) = b_c^k(M)$$

per ogni  $k$  e  $h$ . Ricordiamo che  $b_c^k(N) = \dim H_c^k(N)$ .

**Esercizio 7.4.** Sia  $M$  una varietà connessa e  $p \in M$  un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se  $M$  è semplicemente connessa allora  $b^1(M) = 0$ .

(Nota: in realtà il morfismo viene un isomorfismo, ma la suriettività è più difficile da dimostrare.)

**Esercizio 7.5.** Sia  $M\#N$  la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(M\#N) &= 1 \quad \text{se } i = 0, n, \\ b^i(M\#N) &= b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n. \end{aligned}$$

Deduci che i numeri di Betti della superficie  $S_g$  di genere  $g$  sono

$$b^0(S_g) = 1, \quad b^1(S_g) = 2g, \quad b^2(S_g) = 1$$

e quindi  $\chi(S_g) = 2 - 2g$ .

**Esercizio 7.6.** Sia  $S \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  un sottospazio proiettivo di dimensione complessa  $k \leq n$ . Mostra che la mappa  $i^*: H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow H^{2k}(S)$  è un isomorfismo.

**Esercizio 7.7.** Sia  $M$  una varietà compatta, senza bordo, connessa, orientata. Date due forme volume  $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$ , mostra che esiste un diffeomorfismo  $\varphi: M \rightarrow M$  isotopo all'identità tale che  $\varphi^*(\omega) = \eta$  se e solo se  $\int_M \omega = \int_M \eta$ . L'implicazione difficile è l'esistenza di  $\varphi$ , che si fa secondo questi passi:

- (1) Mostra che esiste  $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$  tale che  $\omega - \eta = d\beta$ .
- (2) Mostra che  $\omega_t = \eta + td\beta$  è una forma volume per ogni  $t \in [0, 1]$ .
- (3) Mostra che per ogni  $t \in [0, 1]$  esiste un unico  $X_t \in \mathfrak{X}(M)$  tale che  $\iota_{X_t}(\omega_t) = \beta$ . Diamo per buono che  $X_t$  dipende in modo liscio da  $t$ .
- (4) Mostra che  $\mathcal{L}_{X_t}(\omega_t) = \frac{d}{dt}\omega_t$ .
- (5) Mostra che esiste una famiglia liscia  $\varphi_t: M \rightarrow M$  di diffeomorfismi tali che  $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$ .

#### 8. Esercizi del 18 aprile

**Esercizio 8.1.** Sia  $T = S^1 \times S^1$  il toro e  $p \in T$  un punto. Considera la 4-varietà  $M = T \times T$  e le sottovarietà  $N_1 = T \times \{p\}$  e  $N_2 = \{p\} \times T$ . Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

**Esercizio 8.2.** Siano  $M$  e  $N$  varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

**Esercizio 8.3.** Costruisci delle varietà orientabili e non orientabili con delle metriche Lorentziane tempo-orientabili e tempo-non orientabili (sono 4 casi).

Ricordiamo che il piano iperbolico nel modello del semipiano è la varietà Riemanniana seguente:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2}g^E.$$

**Esercizio 8.4.** Nel piano iperbolico  $H^2$  nel modello del semipiano, calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni  $a, b > 0$ . L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana  $H^2$ .

**Esercizio 8.5.** Identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  e scriviamo il modello del semipiano del piano iperbolico come  $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ . Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$  sono tutte isometrie di  $H^2$  che preservano l'orientazione. Mostra che agiscono transitivamente sui frame positivi.

**Esercizio 8.6.** Mostra che ogni gruppo di Lie  $G$  ha una metrica invariante a sinistra, cioè tale che  $L_g$  è una isometria per ogni  $g \in G$ .

**Esercizio 8.7.** (Difficile, cerca informazioni in rete.) Sia  $G$  un gruppo di Lie compatto. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su  $G$  *biinvariante*, cioè tale che  $L_g$  e  $R_g$  siano entrambe isometrie per ogni  $g \in G$ .