

Correzioni prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

del 4 febbraio 2014

Esercizio 1. Sia $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ e sia $T : L^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore

$$T(f) = \int_{-1}^1 g(x)f(x) dx,$$

dove g è la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-1, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, 1). \end{cases}$$

- i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.
- ii) Sia $Y = \{f \in L^1(I) : f \text{ dispari}\}$, mostrare che Y è un sottospazio debolmente chiuso di $L^1(I)$.
- iii) Sia $T|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ la restrizione di T al sottospazio Y . Mostrare che $T|_Y$ è un operatore continuo e calcolarne la norma.

SOLUZIONE.

- i) La linearità di T segue dalla linearità dell'integrale. La continuità di T segue dalla disuguaglianza di Hölder $|T(f)| \leq \|g\|_{L^\infty(I)} \|f\|_{L^1(I)}$. Infine, prendendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1), \end{cases}$$

si ottiene

$$\|T\| = \|g\|_{L^\infty(I)} = 1.$$

(Piú semplicemente si potevano usare i risultati noti sulla rappresentazione del duale di L^1 con (funzionali integrali di moltiplicazione con) funzioni g in L^∞ .)

- ii) Si noti che per una f misurabile su $(-1, 1)$ dire che è dispari equivale a dire che esiste una funzione dispari definita su tutto $(-1, 1)$ tale che f coincide con essa quasi ovunque. In breve l'insieme Y consiste delle f tali che $f(x) = -f(-x)$ per q.o. $x \in (-1, 1)$. La chiusura debole deriva subito dal fatto che Y è il nucleo dell'operatore $D : L^1(-1, 1) \rightarrow L^1(-1, 1)$ dato da $D(f)(x) = f(x) + f(-x)$ per $x \in (-1, 1)$. Analogo risultato si poteva ottenere notando che Y è convesso e chiuso forte. La chiusura forte (per successioni) segue passando al limite la condizione $f(x) = -f(-x)$ per q.o. $x \in (-1, 1)$ ed usando il fatto che la convergenza in L^1 implica, a meno di sottosuccessione, la convergenza quasi ovunque.
- iii) La restrizione di un operatore continuo resta continua, quindi $T|_Y$ è continuo. Per calcolarne la norma, osserviamo che per $f \in Y$ si ha $f(x) = -f(-x)$ per q.o. $x \in (-1, 1)$ da cui

$$T(f) = \int_I g(x)f(x) dx = \frac{1}{2} \int_I g(x)f(x) dx - \frac{1}{2} \int_I g(x)f(-x) dx.$$

Utilizzando il cambio di variabile $x = -y$ nell'ultimo integrale si ottiene

$$T(f) = \frac{1}{2} \int_I g(x)f(x) dx - \frac{1}{2} \int_I g(-x)f(x) dx = \int_I \tilde{g}(x)f(x) dx$$

dove abbiamo posto $\tilde{g}(x) = (g(x) - g(-x))/2$. Ne segue

$$\|T|_Y\| = \|\tilde{g}\|_{L^\infty(I)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita e sia $A \subset X$ un insieme limitato. Indicando con C la chiusura di ∂A rispetto alla topologia debole $\sigma(X, X')$, mostrare che $\overline{A} \subset C$. Mostrare che vale l'uguaglianza se l'insieme A è limitato e convesso. Fare l'esempio di un aperto limitato A tale che $\overline{A} \neq C$.

SOLUZIONE. Notiamo che ogni aperto U per la topologia $\sigma(X, X')$ contiene una retta infinita. Ricordando che A è limitato, se $U \subset X \setminus \partial A$, si ha necessariamente $U \subset X \setminus \overline{A}$, cioè $\overline{A} \subset C$. In particolare, C coincide con la chiusura debole di \overline{A} . Se A è convesso, dal Teorema di Hahn-Banach segue che \overline{A} è debolmente chiuso, e quindi $\overline{A} = C$. Preso l'insieme $A = \{x \in X : 1/2 < \|x\| < 1\}$ si ha che $C = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \supsetneq \overline{A}$.

Esercizio 3. Sia $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ l'operatore definito da

$$T(u)(x) = \int_0^x u(t) dt - \int_x^1 u(t) dt \quad x \in (0, 1).$$

- i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo.
- ii) Dimostrare che T è compatto e calcolare lo spettro di T .
- iii) Determinare T^* e mostrare che $Id + T^*T$ è un operatore bigettivo da $L^2(0, 1)$ in sè.
- iv) (Facoltativo) Calcolare la norma di T .

SOLUZIONE.

- i) La linearità segue al solito dalla linearità dell'integrale. Per stimare la norma L^2 di $T(u)$ per $u \in L^2(0, 1)$ utilizziamo la disuguaglianza di Holder su $(0, 1)$ ad x fissato:

$$T(u)^2(x) \leq \left(\int_0^x |u(t)| dt + \int_x^1 |u(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 u^2(t) dt;$$

integrando in x si ottiene che T è limitato con $\|T\| \leq 1$ (la stima sopra però non è ottimale per calcolare la norma).

- ii) Si noti che T è a valori in $H^1(0, 1)$ e che la derivata debole di $T(u)$ verifica $T(u)'(x) = 2u(x)$. Data u_n limitata in $L^2(0, 1)$ si ha che

$$\|T(u_n)\|_{H^1} = \|T(u_n)\|_{L^2} + \|T(u_n)'\|_{L^2} \leq \|T\| \|u_n\|_{L^2} + 2\|u_n\|_{L^2}.$$

Dal teorema di immersione compatta di L^2 in H^1 si conclude.

Poiché T è compatto 0 appartiene allo spettro di T (T è chiaramente non surgettivo su L^2). Utilizzando il Teorema di Fredholm (vedi Teorema 6.8 punto (b) del Brezis) rimangono da calcolare gli autovalori (non nulli) di T . Sia $\lambda \neq 0$ fissato

e sia $u \in \mathcal{L}^2(0, 1)$ candidato autovettore. Imponendo $T(u) = \lambda u$ si deduce che u deve stare in H^1 e la sua derivata debole verifica l'equazione

$$2u = T(u)' = \lambda u' \quad u(0) = -u(1)$$

con i dati al bordo ottenuti dalle identità $2u(0) = T(u)(0) = -\int_0^1 u(t) dt$ e $2u(1) = T(u)(1) = \int_0^1 u(t) dt$. La soluzione generale è della forma $u(x) = ce^{2x/\lambda}$ ed imponendo le condizioni al bordo si vede che l'unica soluzione è $u \equiv 0$. Concludendo, T non ha autovalori e lo spettro di T consta del solo valore $\{0\}$.

Visto che T è un operatore lineare limitato (su un Hilbert) il dominio dell'aggiunto è l'intero duale dello spazio di partenza $L^2(0, 1)$ che si può identificare con $L^2(0, 1)$ stesso. L'aggiunto T^* deve verificare

$$\langle T^*(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle = \int_0^1 v(x) \left(\int_0^x u(t) dt - \int_x^1 u(t) dt \right) dx.$$

Posto $V(x) = \int_0^x v(t) dt$, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(x) \left(\int_0^x u(t) dt \right) dx &= V(1) \int_0^1 u(t) dt - \int_0^1 u(x) V(x) dx \\ &= \int_0^1 u(x) \left(\int_x^1 v(t) dt \right) dx \end{aligned}$$

dove nell'ultima identità abbiamo usato che $V(x) = V(1) - \int_x^1 v(t) dt$. Analogamente si verifica che

$$\int_0^1 v(x) \left(\int_x^1 u(t) dt \right) dx = \int_0^1 u(x) \left(\int_0^x v(t) dt \right) dx$$

Si ottiene quindi $T^*(v)(x) = \int_x^1 v(t) dt - \int_0^x v(t) dt$ e $T^* = -T$.

- iii) Per quanto visto sopra $Id + T^*T$ è ben definito. Usando $T^* = -T$ si ottiene $Id + T^*T = Id - T^2 = (Id + T)(Id - T)$. I valori $1, -1$ non appartengono allo spettro di T per cui gli operatori $Id + T, Id - T$ sono bigettivi e lo è anche la loro composizione.