Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

5 febbraio 2016

Esercizio 1. Sia $V : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ l'operatore lineare definito ponendo

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad x \in [0,1].$$

i) Mostrare che l'operatore V è lineare e continuo.

ii) Mostrare che V è compatto.

iii) Calcolare l'operatore aggiunto V^*.

iv) Determinare lo spettro e le autofunzioni dell'operatore V^*V.

v) Calcolare la norma di V.

Esercizio 2.

i) Caratterizzare i punti estremali della palla unitaria chiusa di ℓ^∞.

ii) Caratterizzare i punti estremali della palla unitaria chiusa di c_0 (dove c_0 è munito della norma indotta da ℓ^∞).

iii) Mostrare che c_0 non è isomorfo al duale di uno spazio di Banach.

iv) Mostrare che la palla unitaria chiusa di c_0 non è sequenzialmente compatta nella topologia debole $\sigma(c_0, \ell^1)$.

Esercizio 3. Sia $T : H^1(0,1) \to H^1(0,1)$ l'operatore definito da

$$T(f)(x) = f(x^2) \qquad f \in H^1(0,1).$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Dire se T è una bigezione.

Soluzione esercizio 1.

i) La linearità di V segue subito dalla linearità dell'integrale. Per vedere che V è continuo, applichiamo la disuguaglianza di Hölder e otteniamo che

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \leq \|f\|_{L^2}\sqrt{x},$$

da cui segue che

$$\|V(f)\|_{L^2} \leq \|\sqrt{x}\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{2}},$$

e quindi $\|V\| \leq 1/\sqrt{2}$.

ii) Proviamo che l'operatore V è compatto. Osserviamo che per ogni $x, y \in [0,1]$, $x > y$ si ha

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = \left| \int_0^1 \chi_{[y,x]}(t)f(t)dt \right| \leq \|f\|_{L^2}\|\chi_{[y,x]}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}|y-x|^{1/2}.$$

In modo analogo si ottiene la stessa catena se $x < y$, quindi per ogni $f \in L^2$ si ottiene che

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| \leq \|f\|_{L^2}|y-x|^{1/2}$$

in particolare $V(f)$ è 1/2-Hölderiana e V è compatto per il Teorema di Ascoli-Arzelà.

iii) Per definizione, l'operatore aggiunto è caratterizzato dalla relazione

$$\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$$

per ogni $f, g \in L^2$.

$$\int_0^1 \Big(\int_0^x f(t)dt\Big)g(x)dx = \int_0^1 \int_0^1 f(t)\chi_{[0,x]}(t)g(x)dtdx$$

Ponendo

$$\chi_{[0,x]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti ,} \end{cases} \tag{1}$$

$$\chi_{[t,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti ,} \end{cases} \tag{2}$$

si ha

$$\langle V(f), g\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(t)\chi_{[0,x]}(t)dt\right) g(x)dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x)\chi_{[t,1]}(x)dx\right) f(t)dt, \tag{3}$$

e si conclude che

$$V^*(g)(t) = \int_0^1 \chi_{[t,1]}(x)g(x)dx = \int_t^1 g(x)dx.$$

iii) Osserviamo prima di tutto che l'operatore V^*V è autoaggiunto e compatto. Pertanto, $\sigma(V^*V) = \{0\} \cup (\cup_k \lambda_k)$, dove λ_k è una successione infinitesima di autovalori. Dobbiamo quindi determinare tutte le coppie (f, λ) non banali, tali per cui $V^*V(f) = \lambda f$. Osservando che

$$V^*V(f)(x) = \int_x^1 V(f)(t)dt = \int_x^1 \Big(\int_0^t f(s)ds\Big)dt.$$

si ha

$$\int_x^1 \Big(\int_0^t f(s)ds\Big)dt = \lambda f(x),$$

pertanto $f \in C^1$. Derivando, si ottiene:

$$-\int_0^x f(s)ds = \lambda f'(x), \qquad f(1) = 0,$$

da cui $f \in C^2$. Derivando ulteriormente si arriva a $-f(x) = \lambda f''(x)$, $f'(0) = 0$, da cui per $\lambda \neq 0$ si ottiene

$$f''(x) + \frac{1}{\lambda} f(x) = 0, \qquad f(1) = f'(0) = 0.$$

Questo problema ammette le soluzioni

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} ae^{x/\sqrt{|\lambda|}} + be^{-x/\sqrt{|\lambda|}}, & \text{per } \lambda < 0, a, b \in \mathbb{R} \\ a\cos\Big(\dfrac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\Big) + b\sin\Big(\dfrac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\Big) & \text{per } \lambda > 0, a, b \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Sostituendo le condizioni al bordo, otteniamo

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}, \qquad f_k(x) = a\cos\Big(\frac{2k+1}{2}\pi x\Big), \qquad a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

iv) Abbiamo

$$\|V\|^2 = \sup_{\|f\| \leq 1} \|V(f)\|^2 = \sup_{\|f\| \leq 1} \langle V^*V(f), f\rangle = \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \lambda_k = \lambda_0 = \frac{4}{\pi^2},$$

da cui otteniamo che $\|V\| = 2/\pi$.

Soluzione esercizio 2.

i) I punti estremali della palla unitaria chiusa di ℓ^∞ sono tutte le successioni $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in ℓ^∞ tali che $x_i = \pm 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

ii) Poiché c_0 non contiene nessuna successione che abbia solo valori ± 1, la palla unitaria chiusa di c_0 non ha punti estremali.

iii) Se c_0 fosse isomorfo al duale di uno spazio di Banach, la palla unitaria di c_0 sarebbe compatta per la topologia debole* e quindi, per il Teorema di Krein-Milman, dovrebbe coincidere con l'inviluppo convesso chiuso dei suoi punti estremali. Poiché, per il punto precedente, la palla non ha punti estremali, ne segue che c_0 non è isomorfo al duale di uno spazio di Banach.

iv) È sufficiente considerare la successione x_n tale che $x_{n,i} = 1$ se $i \leq n$ e $x_{n,i} = 0$ se $i > n$. Supponiamo che tale successione converga debolmente a $x \in c_0$. Prendendo come test gli elementi della base canonica di ℓ^1, si ottiene facilmente che deve valere $x_i = 1$ per ogni i, che è impossibile.

Soluzione esercizio 3.

i) La linearità di T è ovvia. Per vedere che T è continuo, osserviamo che $T(f)'(x) = 2xf'(x^2)$ per ogni $f \in H^1(0,1)$. Si ha quindi

$$\|T(f)\|_{H^1}^2 = \int_0^1 f(x^2)^2 dx + \int_0^1 4x^2 f'(x^2)^2 dx \leq \|f\|_{L^\infty}^2 + 4\|f'\|_{L^2}^2 \leq C\|f\|_{H^1}^2,$$

dove abbiamo usato l'immersione continua di $H^1(0,1)$ in $L^\infty(0,1)$.

ii) T è chiaramente iniettivo. Per vedere che non è surgettivo, è sufficiente osservare che la funzione $f(x) = x$ appartiene all'immagine di T se e solo se la funzione $g(x) = \sqrt{x}$ appartiene a $H^1(0,1)$, la qual cosa non è vera.