Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

19 aprile 2016

Esercizio 1. Sia $E = C([0,1])$. Fissato $\alpha \in [0,1]$, sia $T_\alpha : D(T_\alpha) \subset E \to E$ l'operatore lineare definito da

$$T_\alpha(f)(x) = \int_0^x y^{-\alpha} f(y)dy \qquad x \in [0,1],$$

dove $D(T_\alpha) = \{f \in E : x^{-\alpha} f(x) \in L^1(0,1)\}$.

i) Dire per quali $\alpha \in [0,1]$ T_α è continuo e, nel caso, calcolare la norma di T_α.

ii) Mostrare che per $\alpha < 1$ esiste $p(\alpha) > 1$ tale che $T_\alpha : E \to W^{1,p}(0,1)$ con continuità per ogni $p \in [1, p(\alpha))$.

iii) Mostrare che T_α è compatto per $\alpha < 1$ e determinare lo spettro di T_α.

Esercizio 2. Sia $p \in (1, +\infty)$ e $W := W_0^{1,p}(-1,1)$.

i) Detta $j : W \to L^p(-1,1)$ l'applicazione definita da $j(u) = u'$, provare che j è un'isometria tra W e $j(W)$. Dedurre che W è uno spazio riflessivo.

ii) Data una funzione $f \in L^p(-1,1)$, sia

$$F(u) = \int_{-1}^1 |u'(t)) - f(t)|^p \, dt \quad u \in W.$$

Provare che F è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di W.

iii) Mostrare che F ha minimo in W.

iv) Trovare esplicitamente un minimo di F per $p = 2$ e $f = 1$.

Esercizio 3. Sia $p \in [1, +\infty)$ e sia K un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di ℓ^p.

i) Mostrare che, se $p > 1$, esiste un elemento $x \in K$ di minima norma.

ii) Dire se tale elemento è necessariamente unico.

iii) Mostrare con un esempio che, se $p = 1$, non è sempre vero che esiste un elemento di minima norma (suggerimento: si consideri il convesso che ha per punti estremali $(1 + 1/n)e_n$, dove e_n è la base canonica di ℓ^1).

Soluzione esercizio 1.

i) Se $\alpha = 1$ T_α non è continuo. Infatti, per $\lambda > 0$ si ha

$$T_\alpha(x^\lambda) = \frac{x^\lambda}{\lambda}$$

e quindi $\|T_\alpha\| \geq 1/\lambda$ per ogni $\lambda > 0$.
Se $\alpha \in [0, 1)$ si ha

$$\|T_\alpha(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{\|f\|_\infty}{1-\alpha},$$

quindi T_α è continuo. Inoltre per $f \equiv 1$ vale l'uguaglianza, dunque $\|T_\alpha\| = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

ii) Abbiamo visto che, per $\alpha < 1$, $T_\alpha(f) \in L^\infty$ per ogni $f \in E$. Calcoliamo ora

$$\|T_\alpha(f)\|_p^p = \int_0^1 \frac{|f(x)|^p}{x^{\alpha p}} dx \leq \|f\|_\infty^p \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}} dx,$$

da cui otteniamo che $\|T_\alpha(f)\|_p \leq \|f\|_\infty (1 - \alpha p)^{-\frac{1}{p}}$ per $p < p(\alpha) = 1/\alpha$. Di conseguenza, per $p \in [1, p(\alpha))$, T_α manda E in $W^{1,p}(0, 1)$ con continuità.

iii) Sia $p \in (1, p(\alpha))$. Poiché $T_\alpha : E \to W^{1,p}(0, 1)$ con continuità e $W^{1,p}(0, 1)$ si immerge con compattezza in $C^0([0, 1])$, otteniamo che T_α è un operatore compatto.

Calcoliamo ora lo spettro di T_α. Sappiamo che $0 \in \sigma(T_\alpha)$ e $\sigma(T_\alpha) \setminus \{0\} = VP(T_\alpha)$, resta quindi da calcolare $VP(T_\alpha)$. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, dobbiamo trovare $f_\lambda \in D(T_\alpha)$, $f_\lambda \neq 0$ che risolva $T_\alpha(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$, cioè

$$\int_0^x y^{-\alpha} f_\lambda(y) dy = \lambda f_\lambda.$$

Derivando l'uguaglianza, otteniamo l'equazione $\dfrac{f_\lambda}{x^\alpha} = \lambda f_\lambda'$, da cui segue che

$$f_\lambda(x) = k e^{\frac{x^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)}}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. In particolare $f_\lambda(x) \neq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$. Poiché $T_\alpha(f)(0) = 0$ per ogni f, otteniamo che $\sigma(T_\alpha) = \{0\}$.

Soluzione esercizio 2.

i) Osserviamo che $j : W \to L^p(-1, 1)$ definita da $j(u) = u'$ è lineare, per la linearità della derivata, e continua, essendo

$$\|j(u)\|_p = \|u'\|_p = \|u\|_W \quad \forall\, u \in W.$$

In particolare j è un'isometria e $j(W)$ è un sottospazio chiuso di $L^p(-1, 1)$.
Poiché $L^p(-1, 1)$ è riflessivo per $1 < p < \infty$ e $j(W)$ è chiuso in $L^p(-1, 1)$, anche $j(W)$ e quindi W è spazio di Banach riflessivo.

ii) Si osservi che il funzionale F è convesso, essendo tale la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x - c|^p$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Inoltre, F è continuo nella topologia forte di W perché se $u_n \to u$ in W, allora $u_n' \to u'$ in $L^p(-1,1)$ e quindi $u_n' - f \to u' - f$ in $L^p(-1,1)$. Ne segue che F è semicontinuo inferiormente per la topologia debole di W.

iii) Per provare che ha minimo basta verificare che i suoi sottolivelli sono limitati. In tal caso, questi sarebbero compatti nella topologia debole essendo chiusi e convessi ed essendo W uno spazio riflessivo per $p > 1$. Fissata $C > 0$, se $F(u) \leq C$, allora

$$|\|u'\|_p - \|f\|_p| \leq \|u' - f\|_p \leq C^{1/p},$$

da cui

$$\|u\|_W = \|u'\|_p \leq C^{1/p} + \|f\|_p.$$

iv) Per $p = 2$ e $f = 1$ il funzionale diventa

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \big(u'(t)^2 - 2u'(t) + 1\big) dt = 2 + \int_{-1}^{1} u'(t)^2 dt.$$

Pertanto un minimo di F verifica l'equazione $u''(t) = 0$, cioè u è una funzione lineare tale che $u(-1) = u(1) = 0$ e quindi $u \equiv 0$.

Soluzione esercizio 3.

i) Sia $R > 0$ tale che $\widetilde{K} = K \cap B_R$ non è vuoto. Osserviamo che $\widetilde{K}$ è un convesso chiuso e limitato in uno spazio riflessivo e quindi è anche debolmente compatto. Poiché la norma in uno spazio di Banach è continua e quindi anche debolmente inferiormente semicontinua, otteniamo che esiste un minimo della norma su $\widetilde{K}$, che è anche un minimo su K.

ii) Il minimo è unico poiché la norma di ℓ^p è uniformemente convessa per $p \in (1, +\infty)$. Infatti, se esistessero due elementi $x_1, x_2 \in K$ di minima norma con $x_1 \neq x_2$, si avrebbe $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \in K$ e

$$\|x_3\|_{\ell^p} < \frac{\|x_1\|_{\ell^p} + \|x_2\|_{\ell^p}}{2} = \|x_1\|_{\ell^p},$$

contraddicendo la minimalità di x_1, x_2.

iii) Posto $K = \overline{co((1 + 1/n)e_n)}$, si ha che $x \in K$ se e solo se $x = \sum_n \lambda_n (1 + 1/n) e_n$, con $\lambda_n \in [0, 1]$ per ogni n e $\sum_n \lambda_n = 1$. In particolare, $\|x\|_{\ell^1} = \sum_n \lambda_n (1 + 1/n) > 1$ per ogni $x \in K$. D'altro canto $\|(1 + 1/n)e_n\|_{\ell^1} = 1 + 1/n \to 1$ per $n \to +\infty$ e quindi non esiste un elemento di K di minima norma.