

Capitolo 6

Analisi qualitativa

Con la locuzione analisi qualitativa si intende lo studio del comportamento delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali, ottenuto generalmente senza conoscere, come di norma, un'espressione esplicita per tali soluzioni. Tra le proprietà studiate che considereremo si annoverano la monotonia, la convessità, il comportamento agli estremi dell'intervallo massimale d'esistenza, sia per quanto riguarda l'eventuale esistenza del limite, sia per quanto concerne, più in generale, il profilo asintotico. Molte informazioni riguardanti le soluzioni possono infatti essere ottenute direttamente dall'equazione differenziale stessa; per esempio, nel caso $n = 1$ le proprietà di monotonia sono direttamente collegate col segno del campo vettoriale, il quale fornisce anche molte indicazioni sul comportamento asintotico. Nella prossima sezione verranno inoltre introdotti altri due importanti strumenti: il Teorema del confronto e il criterio dell'asintoto.

Il Teorema del confronto

In questa sezione presenteremo uno strumento molto utile per studiare le proprietà qualitative delle soluzioni di un'equazione differenziale, quali l'intervallo di esistenza, oppure l'esplosione in tempo finito, oppure ancora il comportamento asintotico della traiettoria. Più precisamente vedremo due risultati, il primo che vale nella sola ipotesi di continuità del campo vettoriale f , il secondo più generale in qualche condizione rispetto al primo ma che necessita come controparte dell'unicità delle soluzioni. Si sottolinea fin da subito che i teoremi saranno validi solo nel caso $n = 1$ ovvero per la singola equazione scalare, sebbene alcuni risultati possano essere estesi anche al caso vettoriale con l'utilizzo delle più generali "disuguaglianze differenziali".

Teorema 6.1 (del confronto (I)) *Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, Ω aperto, siano $v, u : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili tali che*

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), \quad u'(t) \geq f(t, u(t)),$$

nelle quali, per ogni $t \in I$, almeno una delle disuguaglianze è stretta. Preso $t_0 \in I$ si ha

- i) FUTURO: *se $v(t_0) \leq u(t_0)$ allora $v(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I$;*
- ii) PASSATO: *se $v(t_0) \geq u(t_0)$ allora $v(t) > u(t)$ per ogni $t < t_0$, $t \in I$.*

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente semplice lemma.

Lemma 6.2 *Date $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $v'(\bar{t}) < u'(\bar{t})$ con $\bar{t} \in I$ allora si ha*

- i) FUTURO: *se $v(\bar{t}) \leq u(\bar{t})$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $v(t) < u(t)$ per ogni $t \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta]$;*
- ii) PASSATO: *se $v(\bar{t}) \geq u(\bar{t})$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $v(t) > u(t)$ per ogni $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t}[$.*

DIMOSTRAZIONE Per definizione di derivata si ha

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{v(t) - v(\bar{t})}{t - \bar{t}} < \lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{u(t) - u(\bar{t})}{t - \bar{t}},$$

e per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$ tale che per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \setminus \{\bar{t}\}$ si ha

$$\frac{v(t) - v(\bar{t})}{t - \bar{t}} < \frac{u(t) - u(\bar{t})}{t - \bar{t}}.$$

Se $v(\bar{t}) \leq u(\bar{t})$ e $t \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ la disuguaglianza sopra equivale a $v(t) - v(\bar{t}) < u(t) - u(\bar{t})$ cioè $u(t) - v(t) > u(\bar{t}) - v(\bar{t}) \geq 0$ da cui il primo risultato. Se $v(\bar{t}) \geq u(\bar{t})$, preso $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t}[$ la disuguaglianza sopra equivale a $v(t) - v(\bar{t}) > u(t) - u(\bar{t})$ cioè $v(t) - u(t) > v(\bar{t}) - u(\bar{t}) \geq 0$ da cui la tesi. \square

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL CONFRONTO (I) Dimostriamo i), analogamente si può procedere per ii). Definiamo l'insieme

$$A := \{t \in I : t > t_0, v(s) < u(s) \forall s \in]t_0, t]\}.$$

Anzitutto si osserva che l'insieme è non vuoto. Infatti, se $v(t_0) < u(t_0)$ per continuità si ha $v(t) < u(t)$ in un intorno destro di t_0 dunque $A \neq \emptyset$. Se, invece, $v(t_0) = u(t_0)$ si ha

$$v'(t_0) \leq f(t_0, v(t_0)) = f(t_0, u(t_0)) \leq u'(t_0),$$

dove per ipotesi almeno una delle disuguaglianze è stretta. Si può quindi applicare il lemma precedente con $\bar{t} = t_0$ (in futuro) e ottenere che $v(t) < u(t)$ in un intorno destro di t_0 , per cui ancora $A \neq \emptyset$.

A questo punto la tesi equivale a dimostrare che $\sup A = \sup I$. Ragionando per assurdo, supponiamo che $\beta := \sup A < \sup I$; in particolare si ha $\beta \in I$. Per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, per ogni $s \in]t_0, \beta[$ esiste $t \in A$ tale che $s < t < \beta$ ma allora $v(s) < u(s)$ per definizione di A . Per continuità si avrà $v(\beta) \leq u(\beta)$. Se fosse $v(\beta) < u(\beta)$, per continuità si potrebbe estendere la disuguaglianza in un intorno destro di β , contro il fatto che β è l'estremo superiore di A . Se fosse $v(\beta) = u(\beta)$, come sopra si dimostrerebbe che $v'(\beta) < u'(\beta)$ e applicando il lemma con $\bar{t} = \beta$ (in passato) si avrebbe che $v(t) > u(t)$ in un intorno sinistro di β , ancora una contraddizione. In definitiva $\sup A = \sup I$ da cui la tesi. \square

Osservazione 6.3 In realtà si è dimostrato che se due funzioni sono tali che $v(t_0) \leq u(t_0)$ e vale $v'(t) < u'(t)$ ogni qual volta $v(t) = u(t)$ per qualche $t \geq t_0$, allora $v(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$.

Nelle ipotesi del teorema, per $t > t_0$ la funzione v viene detta *sottosoluzione* e u viene detta *soprasoluzione* relative all'equazione $y' = f(t, y)$, mentre per $t < t_0$ le terminologie vanno invertite. In particolare, ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è sia sotto che soprasoluzione. Conseguentemente, se $v'(t) < f(t, v(t))$ e $u'(t) > f(t, u(t))$ (ovvero v e u sono per $t > t_0$, rispettivamente, una sottosoluzione e una soprasoluzione *stretta*) e si ha $v(t_0) \leq y(t_0) \leq u(t_0)$ allora $v(t) < y(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$, il che giustifica l'uso della terminologia. In questo caso v e u si dicono anche *sottosoluzione* e, rispettivamente, *soprasoluzione di y per $t > t_0$* . Si tenga ben presente che per una funzione $u(t)$ lo stare sopra una soluzione $y(t)$ non vuol dire essere una soprasoluzione; in effetti per essere soprasoluzione $u(t)$ deve verificare $u'(t) \geq f(t, u(t))$, e il Teorema del confronto afferma che allora u sta effettivamente sopra y . Ma in generale una qualsiasi funzione che stia sopra $y(t)$ non è necessariamente una soprasoluzione. Analoghe considerazioni valgono nel caso di una sottosoluzione.

Il Teorema 6.1, come anche il Teorema 6.4 che seguirà, può dunque essere utilizzato per ottenere delle stime per eccesso e per difetto delle soluzioni utilizzando delle opportune sopra e sottosoluzioni; il vantaggio è che mentre in generale le soluzioni non sono esplicitamente calcolabili, è invece più semplice trovare o costruire delle opportune sopra o sottosoluzioni. Volendo confrontare una soluzione $v = y$ con una soprasoluzione u , poiché $y'(t) = f(t, y(t))$ per ogni t , per applicare il Teorema 6.1 deve necessariamente valere $u'(t) \geq f(t, u(t))$ per ogni t dunque u deve essere soprasoluzione

stretta. Ci si può chiedere se sia possibile indebolire o, meglio, togliere tale restrizione. Vedremo che la risposta è positiva se c'è unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy. Per dimostrare tale estensione del teorema utilizzeremo il Teorema 5.13 di dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale.

Teorema 6.4 (del confronto (II)) *Sia data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, Ω aperto, tale che il problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ ammetta un'unica soluzione $y(t)$ nell'intervallo I . Sia $v : J \rightarrow \mathbb{R}$, tale che*

$$\begin{cases} v'(t) \leq f(t, v(t)) \\ v(t_0) \leq y_0, \end{cases} \quad t \in J.$$

Allora $v(t) \leq y(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I \cap J$.

DIMOSTRAZIONE Sia K un generico intervallo compatto contenuto in I (nel caso I stesso sia compatto basta prendere $K = I$). Poniamo $f_k(t, y) := f(t, y) + \frac{1}{k}$ e $(t_k, y_k) = (t_0, y_0)$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Banalmente si ha che $f_k \rightarrow f$ uniformemente in Ω per $k \rightarrow +\infty$. Detta $y_k(t)$ una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f_k(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

per il Teorema 5.13 esiste \bar{k} tale che per $k \geq \bar{k}$ è possibile definire $y_k(t)$ su tutto K e si ha $y_k \rightarrow y$ se $k \rightarrow +\infty$ uniformemente su K . Confrontiamo ora v e y_k : si ha $v(t_0) \leq y_0 = y_k(t_0)$ e inoltre

$$v'(t_0) \leq f(t, v(t)) < f(t, v(t)) + \frac{1}{k} = f_k(t, v(t)),$$

quindi v è sottosoluzione stretta di y_k . Applicando il Teorema 6.1 alle funzioni f_k , v e y_k si ottiene che $v(t) < y_k(t)$ per ogni $t \in K \cap J$, $t > t_0$, e $k \geq \bar{k}$. Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ si ha $v(t) \leq y(t)$ per ogni $t \in K \cap J$, $t > t_0$ e per l'arbitrarietà di K in I tale disuguaglianza vale in tutto $I \cap J$. \square

Osservazione 6.5 Vale un risultato analogo al Teorema 6.4 per soprassoluzioni $u(t)$ tali che

$$\begin{cases} u'(t) \geq f(t, u(t)) \\ u(t_0) \geq y_0, \end{cases} \quad t \in J,$$

ottenendo come tesi $u(t) \geq y(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I \cap J$. In maniera del tutto simile si dimostra poi anche una versione in passato.

Osservazione 6.6 Non è possibile estendere ulteriormente il teorema precedente, per esempio togliendo l'ipotesi di unicità delle soluzioni. Infatti, se valesse una tale estensione, considerando un problema di Cauchy senza unicità delle soluzioni (per esempio $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$), e prendendo due soluzioni distinte y_1 e y_2 , applicando tale estensione alle funzioni $v = y_1$ (ogni soluzione è sottosoluzione) e $y = y_2$ si otterrebbe $y_1(t) \leq y_2(t)$ per ogni t . Scambiando il ruolo delle funzioni e quindi prendendo $v = y_2$ e $y = y_1$ si otterrebbe anche $y_2(t) \leq y_1(t)$ per ogni t da cui $y_1(t) = y_2(t)$, assurdo. L'estensione del teorema sarebbe falsa anche richiedendo in aggiunta che valesse la disuguaglianza stretta $v(t_0) < y(t_0)$ (trovare per esercizio un controesempio). Si potrebbe invece dimostrare che ogni sottosoluzione $v(t)$ soddisfa $v(t) \leq \bar{y}(t)$ e ogni soprasoluzione $u(t)$ soddisfa $u(t) \geq \underline{y}(t)$ dove \bar{y} e \underline{y} sono, rispettivamente, l'integrale superiore e l'integrale inferiore del problema di Cauchy in oggetto.

Il criterio dell'asintoto

Un ulteriore strumento utile per lo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali è il criterio dell'asintoto, utilizzato principalmente per studiare il limite, o più in generale il comportamento asintotico, delle soluzioni per $t \rightarrow \pm\infty$.

Teorema 6.7 (criterio dell'asintoto) *Sia data $f : [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che*

- i) il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste finito;*
- ii) esiste il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.*

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Un risultato analogo vale per funzioni definite in $] -\infty, x_0]$ per quanto concerne il limite per $x \rightarrow -\infty$.

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione segue subito dall'applicazione del Teorema di de l'Hôpital che vale per limiti di forme indeterminate del tipo $[\frac{\text{qualsiasi cosa}}{\infty}]$, applicato al limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$. Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Alternativamente si poteva applicare il Teorema di Lagrange a f in ogni intervallo del tipo $[x_n, x_{n+1}]$ dove (x_n) è una successione che diverge a $+\infty$. Prendendo per esempio $x_n = n$, per Lagrange esiste $\xi_n \in]n, n+1[$ tale che

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)((n+1) - n) = f'(\xi_n).$$

Per i) entrambi gli addendi a primo membro tendono al medesimo limite finito e passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\xi_n) = 0$. Poiché per confronto (ξ_n) diverge a $+\infty$ e il limite della derivata prima esiste per ii), per il teorema sui limite mediante successioni si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\xi_n) = 0$. \square

Osservazione 6.8 L'ipotesi i) può essere indebolita chiedendo che f sia solamente limitata in un intorno di $+\infty$ (si può ancora applicare de L'Hôpital).

Osservazione 6.9 Le ipotesi i) e ii) sono indipendenti una dall'altra. Per esempio, la funzione $f(x) = \ln x$ soddisfa $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ ma non esiste il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; in questo caso vale dunque ii) ma non vale i). Come secondo esempio si consideri $f(x) = \frac{\text{sen } x^2}{x}$ per la quale $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \cos x^2 - \frac{\text{sen } x^2}{x^2})$ non esiste perché non esiste il limite della funzione coseno all'infinito. In questo caso vale dunque i) ma non ii).

Nel caso delle equazioni differenziali il criterio verrà principalmente utilizzato per *escludere* che il limite di una soluzione per $t \rightarrow \pm\infty$ sia finito (si vedano gli esercizi più avanti). Un'altra notevole ma semplice applicazione è data dal seguente risultato al quale premettiamo una definizione.

Definizione 6.10 *Un equilibrio per un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è una soluzione costante sul proprio dominio di definizione.*

Se l'equazione è autonoma cioè $f = f(y)$, $y(t) = \bar{y}$ è un equilibrio se e solo se $0 = y'(t) = f(y(t)) = f(\bar{y})$ cioè se e solo se \bar{y} è uno zero del campo vettoriale f . Nel caso non autonomo, invece, $y(t) = \bar{y}$ è un equilibrio definito per $t \in I$ se e solo se $0 = y'(t) = f(t, y(t)) = f(t, \bar{y})$ ovvero $f(t, \bar{y}) = 0$ per ogni $t \in I$.

Corollario 6.11 *Sia data $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione continua, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se $y : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ è soluzione dell'equazione $y' = f(y)$ tale che $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = a \in A$, allora a è un equilibrio del sistema, cioè $f(a) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE Posto $f = (f_1, \dots, f_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e inoltre $a = (a_1, \dots, a_n)$, applichiamo il criterio dell'asintoto a ciascuna componente $y_k(t)$ della soluzione $y(t)$. Si ha che $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_k(t) = a_k$ e per continuità di f in $a \in A$ vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_k(y(t)) = f_k(a)$. Per il criterio dell'asintoto si ha $f_k(a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y'_k(t) = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ da cui segue $f(a) = 0$. \square

Ogni soluzione di un'equazione differenziale autonoma che sia globalmente definita in futuro ha dunque le seguenti alternative: i) la soluzione

non ammette limite per $t \rightarrow +\infty$ (per esempio se è una soluzione periodica); ii) la soluzione esplode in norma; iii) la soluzione converge a un punto della frontiera di A ; iv) la soluzione converge a un equilibrio del sistema.

Si noti infine che il corollario precedente vale solo per equazioni autonome. Per esercizio si trovi un controesempio nel caso non autonomo.

Esercizio 6.12 Dimostrare la seguente generalizzazione del Criterio dell'asintoto: data $f : [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che ammette finito il limite per $x \rightarrow +\infty$, allora

i) $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \leq 0$, e $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \geq 0$;

ii) se f' è continua, l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f'(s) ds$ converge.

Riottenere come corollario il criterio dell'asintoto.

Esempi ed esercizi

Vediamo ora qualche esempio di studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale scalare mediante gli strumenti fin qui introdotti.

Esempio 6.13 Proseguiamo con l'analisi qualitativa delle soluzioni dell'equazione

$$y' = \frac{1}{y^2 + t^2},$$

già cominciata nell'Esercizio 4.18. Studiamo il comportamento asintotico delle soluzioni. Per il punto b) dell'Esercizio 4.18 è sufficiente limitarsi a $t \rightarrow +\infty$, il caso $t \rightarrow -\infty$ ottenendosi per simmetria. Anzitutto osserviamo che tutte le soluzioni sono monotone crescenti perché il campo vettoriale $f(t, y) = \frac{1}{y^2 + t^2}$ è sempre strettamente positivo. Per monotonia, ogni soluzione $y(t)$ con $y(t_0) = y_0$ e $t_0 > 0$ oppure con $y(0) = y_0$ e $y_0 \neq 0$, che è definita (almeno) in $]0, +\infty[$ sempre per l'Esercizio 4.18, ammette limite per $t \rightarrow +\infty$, sia esso y_∞ , finito oppure $+\infty$. Dimostriamo che il limite è finito. Anzitutto si osservi che il criterio dell'asintoto non dà alcuna informazione essendo in ogni caso $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2(t) + t^2} = 0$. Utilizziamo allora le informazioni che provengono direttamente dall'andamento del campo vettoriale. Presa una soluzione $y(t)$ con $y(0) = y_0 > 0$, dalla monotonia e integrando l'equazione differenziale tra 0 e $t > 0$ si ottiene

$$y(t) - y_0 = \int_0^t y'(s) ds = \int_0^t \frac{1}{y^2(s) + s^2} ds \leq \int_0^t \frac{1}{y_0^2 + s^2} ds = \frac{1}{y_0} \operatorname{arctg} \frac{t}{y_0}.$$

Passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ in quest'ultima disuguaglianza si ottiene $y_\infty \leq y_0 + \pi/(2y_0)$ dunque y_∞ è finito e si anche trovata una sua stima per eccesso. Le soluzioni con $y_0 < 0$ avranno poi una traiettoria limitata dall'alto da una qualsiasi soluzione con dato iniziale positivo, dunque avranno ancora $y_\infty < \infty$. Analogamente, il limite per $t \rightarrow -\infty$ sarà anch'esso finito.

Per dimostrare che il limite è finito può anche tornare utile il criterio del confronto. A tal fine, infatti, è sufficiente trovare una soprasoluzione che abbia limite finito e per confronto anche il limite della soluzione lo sarà. La difficoltà sta chiaramente nel trovare (se esiste) una tale soprasoluzione. Motivati dall'analisi precedente, si può provare con un'arcotangente. Più precisamente, dimostriamo che data $y(t)$ soluzione dell'equazione con $y(t_0) = y_0$ e $y_0 > 0$, la funzione $w(t) = \operatorname{arctg}(t - t_0) + w_0$ dove $w_0 = \max\{y_0, 1\}$ è una sua soprasoluzione per $t > t_0$. Infatti, si ha $w(t_0) = w_0 \geq y_0$ e anche

$$\begin{aligned} w'(t) \geq f(t, w(t)) &\iff \frac{1}{1 + (t - t_0)^2} \geq \frac{1}{(\operatorname{arctg}(t - t_0) + w_0)^2 + t^2} \\ &\iff (\operatorname{arctg}(t - t_0) + w_0)^2 + t^2 \geq 1 + (t - t_0)^2 \\ &\iff \operatorname{arctg}^2(t - t_0) + 2w_0 \operatorname{arctg}(t - t_0) + (w_0^2 - 1) + t_0(2t - t_0) \geq 0, \end{aligned}$$

che è verificata per ogni $t \geq t_0$. In definitiva $w(t)$ è soprasoluzione di $y(t)$ per $t > t_0$ e per il Teorema del confronto si ha $y(t) \leq w(t)$ per $t > t_0$. Passando al limite si ottiene infine $y_\infty \leq \pi/2 + w_0$ che fornisce anche una stima del limite per eccesso. Per esercizio si provi che per ogni (t_0, y_0) , $t_0, y_0 > 0$ anche la funzione $w(t) = m_0 \operatorname{arctg}(m_0(t - t_0)) + y_0$, dove $m_0 = (y_0^2 + t_0^2)^{-1/2}$, è soprasoluzione per $t > t_0$ della soluzione $y(t)$ tale che $y(t_0) = y_0$.

Proviamo ora a stimare la differenza $y_\infty - y_0$: la disuguaglianza $y_\infty \leq y_0 + \pi/(2y_0)$, trovata sopra, fornisce una buona approssimazione del limite y_∞ quando y_0 è grande, essendo in questo caso $|y_\infty - y_0| \leq \pi/(2y_0) \ll 1$. Volendo ottenere delle stime più accurate quando $y_0 \simeq 0$ oppure $y_0 < 0$ si può operare come segue. Si osservi che la funzione $h(y_0) = y_0 + \pi/(2y_0)$ ha un minimo assoluto per $y_0 = \sqrt{\pi/2}$ in $]0, +\infty[$. Se $y_0 \geq \sqrt{\pi/2}$ allora $y_\infty - y_0 \leq \pi/(2y_0) < \sqrt{\pi/2}$. Se invece $y_0 < \sqrt{\pi/2}$ si hanno due sottocasi: nel caso in cui $y(t) < \sqrt{\pi/2}$ per ogni $t \geq 0$, si ha $y(t) - y_0 < \sqrt{\pi/2}$ da cui $y_\infty - y_0 \leq \sqrt{\pi/2}$. Altrimenti, definitivamente per $t \geq t_1$ si ha $y(t) \geq y(t_1) = \sqrt{\pi/2}$, e integrando tra t_1 e t si trova

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{1}{y^2(s) + s^2} ds \leq \sqrt{\pi/2} + \int_{t_1}^t \frac{1}{\pi/2 + s^2} ds \\ &\leq \sqrt{\pi/2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi/2 + s^2} ds = 2\sqrt{\pi/2} = \sqrt{2\pi}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene $y_\infty - y_0 \leq y_\infty \leq \sqrt{2\pi}$. Sia ora $y_0 < 0$; se inoltre $y_0 \geq -\sqrt{2\pi}$ si ha che il limite y_∞ è sicuramente inferiore a quello relativo a $y_0 = 0^+$ che è maggiorato da $\sqrt{2\pi}$. Si ottiene allora $y_\infty - y_0 \leq \sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi}$. Infine, se $y_0 < -\sqrt{2\pi}$ allora per tutti i t per cui $y(t) \leq y_0/2$ si ottiene

$$y(t) \leq y_0 + \int_0^t \frac{1}{(y_0/2)^2 + s^2} ds < y_0 + \frac{\pi}{2|y_0/2|} = y_0 - \frac{\pi}{y_0}.$$

Per $y_0 < -\sqrt{2\pi}$ si ha $y_0 - \pi/y_0 < y_0/2$, dunque $y(t) \leq y_0/2$ per ogni $t \geq 0$ e vale la stima sopra per gli stessi t da cui anche $y_\infty - y_0 \leq \pi/|y_0| \leq \sqrt{\pi/2}$. Per simmetria si ottengono analoghe stime per $y_{-\infty} := \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$. In particolare, indipendentemente da y_0 si ha che $y_\infty - y_{-\infty} \leq 3\sqrt{2\pi}$ (al variare di y_0 si può essere più precisi), dunque ogni traiettoria è contenuta in una striscia del piano di ampiezza al più $3\sqrt{2\pi}$.

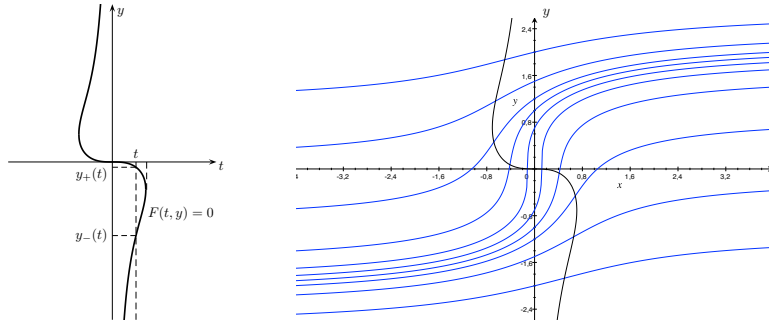


Figura 6.1: La cubica $F(t, y) = 0$ e l'andamento delle soluzioni

Procediamo con l'analisi studiando la concavità/convessità delle soluzioni. Poiché il campo vettoriale è C^∞ , tali saranno anche le soluzioni; derivando ulteriormente l'equazione si ottiene

$$y''(t) = \left(\frac{1}{y^2(t) + t^2} \right)' = -\frac{2y(t)y'(t) + 2t}{(y^2(t) + t^2)^2} = -2[y'(t)]^2(y(t)y'(t) + t),$$

quindi $y''(t) \leq 0$ se e solo se $y(t)y'(t) + t \geq 0$ e ricordandosi dell'equazione ciò equivale a $\frac{y(t)}{y^2(t) + t^2} + t \geq 0$ cioè a $ty^2(t) + y(t) + t^3 \geq 0$. L'equazione $F(t, y) := ty^2 + y + t^3 = 0$ rappresenta una cubica nel piano $t-y$, ed essendo $F(-t, -y) = F(t, y)$ è simmetrica rispetto all'origine. Studiamola per $t \geq 0$, osservando che F come funzione di y è un polinomio di secondo grado. Se $\Delta = 1 - 4t^4 < 0$, l'equazione $F(t, y) = 0$ nell'incognita y non ha dunque soluzione; ciò accade se $t > t_M := 1/\sqrt[4]{4} = 1/\sqrt{2}$. La cubica è dunque tutta

contenuta nella striscia di piano $[-t_M, t_M] \times \mathbb{R}$. Per $t \in [0, t_M]$ l'equazione $F(t, y) = 0$ nell'incognita y ha due soluzioni $y_-(t)$ e $y_+(t)$, entrambe negative per la regola dei segni di Cartesio, e coincidenti se $t = t_M$. In particolare, si ha $F(t, y) \geq 0$ se e solo se $y \leq y_-(t)$ oppure $y \geq y_+(t)$. Se ne deduce che nel semipiano $t > 0$ si ha $y''(t) = 0$ lungo la cubica, e $y''(t) < 0$, cioè la relativa soluzione è concava, nell'insieme

$$C := \{(t, y) : t > t_M\} \cup \{(t, y) : 0 \leq t \leq t_M, y < y_-(t) \text{ o } y > y_+(t)\}.$$

Per simmetria si ottiene poi l'andamento della convessità anche nel semipiano $t < 0$. Il profilo qualitativo delle cubica F e delle soluzioni è delineato in Figura 6.1.

Concludiamo l'analisi dimostrando che esistono soluzioni non globalmente definite; in tal caso, per il Teorema della fuga dai compatti non potrà che essere $(t, y(t)) \rightarrow (0, 0)$. L'esistenza di tali soluzioni deriva da un argomento di continuità delle soluzioni dai dati iniziali. L'idea è la seguente: detti $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e preso $y_0^+ > 0$, per esempio $y_0^+ = 1$, poniamo $y_1^+ = y(t_1; t_0, y_0^+)$. Preso poi $y_0^- < 0$, per esempio $y_0^- = -1$ sia $y_1^- = y(t_1; t_0, y_0^-)$. Consideriamo ora le soluzioni passanti per il generico punto dell'intervallo $[y_1^-, y_1^+]$ all'istante $t_1 = 1$. Per quanto già visto tutte queste soluzioni sono definite almeno in $]0, +\infty[$. Inoltre, per costruzione le due soluzioni passanti per y_1^\pm sono definite anche in $t_0 = 0$ valendo y_0^\pm . Se tutte le soluzioni considerate fossero definite anche in $t = 0$, allora l'immagine dell'intervallo $[y_1^-, y_1^+]$ mediante l'applicazione continua $y_1 \mapsto y(0; t_1, y_1)$ sarebbe necessariamente l'intervallo $[y_0^-, y_0^+]$. In particolare dovrebbe esistere una soluzione passante per $(0, 0)$, assurdo perché tale punto non appartiene al dominio di definizione. Ne consegue che deve esistere almeno una soluzione che non può essere definita in $t_0 = 0$.

Esercizio 6.14 Data l'equazione

$$y' = g(t, y) \operatorname{sen}^2 y$$

con $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(t, y) > 0$,

- a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i problemi di Cauchy associati. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- b) Trovare le soluzioni costanti (equilibri);
- c) provare che le soluzioni massimali sono globalmente definite in \mathbb{R} e che sono limitate;

- d) dimostrare che se $y(t)$ è soluzione massimale esistono finiti i limiti $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t)$;
- e) supposto che inoltre esistano $\tau, m > 0$ tali che $g(t, y) \geq m$ per ogni $|t| \geq \tau$, detta $y(t)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy tale che $y(0) = \pi/2$ si calcolino tali limiti;
- f) è ancora vero il risultato di e) se non esiste una limitazione inferiore positiva su g ?
- g) Supposto $g = g(t)$ si trovino condizioni necessarie e sufficienti su g affinché la soluzione con $y(0) = \pi/2$ abbia gli stessi limiti trovati in e).

SOLUZIONE. a) Per ipotesi il campo vettoriale $f(t, y) = g(t, y) \operatorname{sen}^2 y$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ dunque c'è esistenza e unicità locale per tutti i problemi di Cauchy. Poiché non si conosce il comportamento di $g(t, y)$ per $|y| \rightarrow +\infty$, né la sua derivata parziale rispetto a y , non è possibile applicare i teoremi di esistenza globale.

b) Si ha $f(t, y) = 0$ se e solo se $\operatorname{sen} y = 0$ cioè $y = \bar{y}_k := k\pi, k \in \mathbb{Z}$, che sono quindi le soluzioni costanti (equilibri) dell'equazione.

c) Sia $y(t_0) = y_0$; se $y_0 = \bar{y}_k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, per unicità la relativa soluzione $y(t)$ coincide con l'equilibrio \bar{y}_k per ogni t ed è globalmente definita. Altrimenti esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k\pi < y_0 < (k+1)\pi$. Poiché per unicità le traiettorie non si intersecano, si avrà $k\pi < y(t) < (k+1)\pi$ per ogni t di definizione. Avendo l'orbita contenuta (in futuro e passato) nel compatto $[k\pi, (k+1)\pi]$, per il Teorema 4.1 $y(t)$ è globalmente definita in \mathbb{R} e limitata.

d) Se $y(t)$ è una soluzione massimale differente da un equilibrio (per i quali la tesi è banale), per il punto precedente ha l'orbita sempre strettamente contenuta tra due di essi, per cui vale $y'(t) = f(t, y(t)) > 0$ per ogni t . Dunque $y(t)$ è strettamente crescente e per monotonia esistono i limiti richiesti;

e) Per i punti c)-d) si avrà $0 < y(t) < \pi$ e $y(t)$ crescente per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dimostriamo che allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \pi$; analogamente si può dimostrare che $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$. Posto $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_\infty$, per assurdo sia $y_\infty < \pi$. Allora si ha $\pi/2 = y_0 \leq y(t) < y_\infty < \pi$ per ogni $t \geq t_0$ da cui $\operatorname{sen}^2 y(t) > \operatorname{sen}^2 y_\infty > 0$. Per ogni $t \geq \tau$ si avrà quindi $y'(t) > m \operatorname{sen}^2 y_\infty$ e integrando

$$y(t) - y(\tau) = \int_\tau^t y'(s) ds > \int_\tau^t m \operatorname{sen}^2 y_\infty ds = (t - \tau)m \operatorname{sen}^2 y_\infty,$$

con il membro destro che tende all'infinito se $t \rightarrow +\infty$ da cui l'assurdo perché $y(t)$ è limitata. Analogamente si può dimostrare che se $y_0 \in]\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}[$ allora

la relativa soluzione $y(t)$ verifica $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \bar{y}_{k+1}$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \bar{y}_k$. L'andamento globale delle soluzioni è delineato in Figura 6.2.

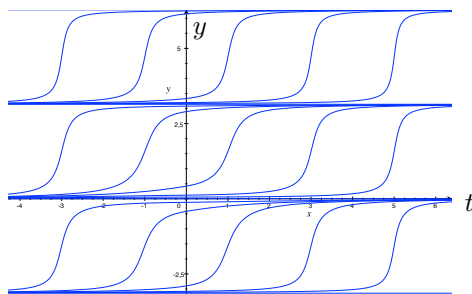


Figura 6.2: Quadro globale delle soluzioni

f)-g) Se $\inf g = 0$ non è detto che la soluzione tenda verso gli equilibri. Per esempio, supposta $g = g(t)$ l'equazione è a variabili separabili e integrando si ottiene

$$\int_{\pi/2}^{y(t)} \frac{1}{\sin^2 z} dz = \int_0^t g(s) ds \quad \implies \quad -\operatorname{ctg} y(t) = G(t)$$

cioè $y(t) = \operatorname{arctg}(-G(t))$, dove $G(t)$ è la primitiva di g tale che $G(0) = 0$. Se ne deduce che si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \pi$ se e solo se $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = +\infty$; analogamente $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ se e solo se $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = -\infty$. In definitiva, condizione necessaria e sufficiente affinché valga e) è che g abbia integrale divergente a $\pm\infty$. Per ottenere un controesempio in f) basta allora trovare una funzione positiva g con limite 0 per $t \rightarrow \pm\infty$ (tale che non valga l'ipotesi in e)) e con integrale convergente; per esempio $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$, con integrale $\int_0^{+\infty} g(s) ds = \pi/2$. La soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy $y' = \frac{1}{1+t^2} \sin^2 y$, $y(0) = \pi/2$ soddisferà $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \operatorname{arctg}(-\pi/2) < \pi$.

Esercizio 6.15 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2} - e^{t^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Verificare che se $y(t)$ è soluzione dell'equazione in $] \alpha, \beta[$ allora anche $z(t) := -y(-t)$ è soluzione in $] -\beta, -\alpha[$. Ricavare da questo fatto che la soluzione del problema di Cauchy è una funzione dispari;

- c) studiare le regioni del piano $t - y$ dove le soluzioni dell'equazione differenziale sono crescenti e dove sono decrescenti;
- d) dimostrare che la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy è globalmente definita in \mathbb{R} (utilizzare opportune sopra e sottosoluzioni);
- e) studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t)$;
- f) provare che esistono soluzioni dell'equazione che tendono a $+\infty$ in futuro;
- g) esistono soluzioni dell'equazione non globalmente definite in futuro? Cosa succede eventualmente del loro limite per $t \rightarrow \beta^-$? Esistono soluzioni non globalmente definite sia in passato che in futuro?
- h) Dimostrare che tutte le soluzioni $y(t)$ superlineari tali che $y(t) \geq mt$ definitivamente per $t \geq t_m$, con $m > 1$, esplodono in tempo finito.

SOLUZIONE. a) Il campo vettoriale $f(t, y) = e^{y^2} - e^{t^2}$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dunque ci sono esistenza e unicità locale per tutti i problemi di Cauchy, in particolare per quello in considerazione. A causa del termine e^{y^2} il campo vettoriale non è sublineare né globalmente lipschitziano, quindi non si possono applicare i vari teoremi di esistenza globale.

b) Supposto che $y(t)$ sia soluzione si ha

$$z'(t) = y'(-t) = e^{y^2(-t)} - e^{(-t)^2} = e^{z^2(t)} - e^{t^2} = f(t, z(t)),$$

quindi $z(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale. Se in più vale $y(0) = 0$ si ha anche $z(0) = -y(0) = 0$, perciò sia $y(t)$ che $z(t)$ sono soluzioni del medesimo problema di Cauchy con dati $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Per unicità si ha $y(t) = z(t) = -y(-t)$ su un intervallo comune di esistenza (che deve allora necessariamente contenere l'origine ed essere simmetrico rispetto a essa) dunque y è funzione dispari.

c) Essendo $y'(t) = f(t, y(t))$, tali regioni si trovano studiando il segno del campo vettoriale f : dove esso è positivo le soluzioni saranno crescenti, dove negativo decrescenti. Si ha $f(t, y) \geq 0$ se e solo se $e^{y^2} \geq e^{t^2}$ ovvero $y^2 \geq t^2$ cioè $|y| \geq |t|$; in particolare il campo vettoriale si annulla lungo le rette di equazione $y = t$ e $y = -t$.

d) Prendendo $u(t) = t$ si ha $u'(t) = 1 > 0 = f(t, u(t))$, dunque $u(t)$ è soprasoluzione in futuro; analogamente, presa $w(t) = -t$ si ha $w'(t) = -1 < 0 = f(t, w(t))$ e w è sottosoluzione. Detta $y(t) :] - \beta, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy, poiché inoltre $w(0) = y(0) = u(0) = 0$, w e u

sono, rispettivamente, sotto e soprasoluzione (strette) di y per $t > 0$. Per il Teorema 6.1 (si può anche applicare il Teorema 6.4) vale $-t = w(t) < y(t) < u(t) = t$ per ogni $t \in]0, \beta[$. In particolare si ha $|y(t)| \leq t$ e per il Teorema 4.5 la soluzione è globalmente definita in futuro, cioè $\beta = +\infty$. Grazie al punto b) la soluzione è anche globalmente definita in passato.

e) Per il punto b) è sufficiente studiare il limite per $t \rightarrow +\infty$. Nel punto d) si è provato che $|y(t)| < t$ per $t > 0$, dunque $(t, y(t))$ appartiene alla regione di piano dove f è negativa. Ciò implica che $y'(t) = f(t, y(t)) < 0$, perciò $y(t)$ è decrescente e per monotonia ammette limite per $t \rightarrow +\infty$, sia esso y_∞ . Se fosse $y_\infty \in \mathbb{R}$ si avrebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{y^2(t)} - e^{t^2}) = -\infty,$$

contro il criterio dell'asintoto. Allora necessariamente $y_\infty = -\infty$. Si potrebbe anche dimostrare che ogni soluzione che entra definitivamente in futuro nella regione $|y| \leq t$ è asintotica alla retta $y = -t$. La traiettoria della soluzione è descritta dalla linea blu in a) della Figura 6.3.

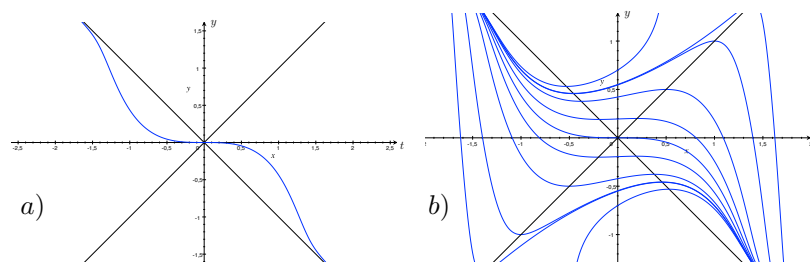


Figura 6.3: a) Traiettoria della soluzione del problema di Cauchy; b) andamento generale delle soluzioni

f) Basta provare che esistono soluzioni $y(t)$ che stanno sempre sopra la retta $y = t$. Purtroppo tale funzione non è sottosoluzione (anzi è soprasoluzione!) perciò non è immediato verificare che vale $y(t) \geq t$. Conviene invece dimostrare che esistono sottosoluzioni della forma $v(t) = mt$ con $m > 1$. A tal fine dovrà essere

$$v'(t) \leq f(t, v(t)) \iff m \leq e^{m^2 t^2} - e^{t^2}.$$

Essendo $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{m^2 t^2} - e^{t^2}) = +\infty$ si ha $e^{m^2 t^2} - e^{t^2} \geq m$ definitivamente per $t \geq t_m$ per qualche t_m . Detta $y(t)$ la soluzione di $y' = e^{y^2} - e^{t^2}$ tale che $y(t_m) = v(t_m) = mt_m$, si ha che $v(t)$ è una sottosoluzione di $y(t)$ in futuro

per $t > t_m$. Per il Teorema 6.4 vale $y(t) \geq v(t)$ per ogni $t \geq t_m$ per i quali $y(t)$ è definita. Se y non è globalmente definita in futuro per il Teorema dell'esplosione in norma dovrà esplodere (a $+\infty$) in tempo finito; altrimenti, se $y(t)$ è globalmente definita in futuro si ha comunque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = +\infty.$$

g) Anzitutto, come già osservato in f) è chiaro che se una soluzione non è globalmente definita dovrà tendere a $+\infty$ o a $-\infty$. Essendo $e^{y^2} > y^2$ si ha che $y'(t) > y^2(t) - e^{t^2}$ e poiché l'equazione $y' = y^2$ ha soluzioni che esplodono in tempo finito, a maggior ragione ci si aspetta questo comportamento anche per (alcune) soluzioni dell'equazione in oggetto. Per dimostrare che esistono effettivamente soluzioni non globalmente definite si può cercare una sottosoluzione dell'equazione che esplose in tempo finito; per esempio una funzione del tipo $z(t) = \frac{1}{\tau-t}$ con $\tau > 0$ fissato, che esplose per $t \rightarrow \tau^-$. Affinché $z(t)$ sia sottosoluzione in un intorno sinistro di τ dovrà ivi valere $z'(t) \leq f(t, z(t))$, e osservando che $z'(t) = z^2(t)$ tale equazione equivale a

$$z^2(t) \leq e^{z^2(t)} - e^{t^2} \iff e^{z^2(t)} \geq z^2(t) + e^{t^2}.$$

Essendo $e^{t^2} < e^{\tau^2}$ per $0 < t < \tau$ basta dimostrare che vale $e^{z^2(t)} \geq z^2(t) + e^{\tau^2}$. Poiché $\lim_{t \rightarrow \tau^-} z(t) = +\infty$ è chiaro che una tale disequazione è definitivamente verificata in un intorno sinistro di τ , diciamolo $[t_0, \tau[$ con $t_0 < \tau$. In tale intervallo $z(t)$ è sottosoluzione; in particolare, detta $y(t)$ la soluzione dell'equazione $y' = e^{y^2} - e^{t^2}$ tale che $y(t_0) = z(t_0)$, si ha che $z(t)$ è una sottosoluzione di $y(t)$ nell'intervallo $[t_0, \tau[$ dunque, per il Teorema 6.4, vale $y(t) \geq z(t)$ per ogni $t \in [t_0, \tau[$ di definizione di y . Da ciò segue facilmente che o $y(t)$ non è definita fino a τ , e dunque esplose a $+\infty$ per $t \rightarrow \beta^-$ con $\beta < \tau$, oppure $\lim_{t \rightarrow \tau^-} y(t) = +\infty$ per confronto. Il quadro globale delle traiettorie delle soluzioni è delineato in b) della Figura 6.3.

Infine, non esistono soluzioni che non siano contemporaneamente globalmente definite sia in futuro che in passato. Infatti, per unicità ogni soluzione dovrà stare o sempre sopra o sempre sotto la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy in oggetto. Se una tale soluzione $\bar{y}(t)$ esistesse dovrebbe allora soddisfare $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \bar{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \bar{y}(t) = +\infty$ oppure $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \bar{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \bar{y}(t) = -\infty$, ma ciò non è possibile perché tutte le soluzioni che stanno sopra $y(t)$ non possono esplodere a $+\infty$ in tempo finito per $t \rightarrow \alpha^+$, né a $-\infty$ per $t \rightarrow \beta^-$, e analogamente per quelle che stanno sempre sotto.

h) Sia $y :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $y(t) \geq mt$ per ogni $t_m < t < \beta$, con $m > 1$, dove si può anche supporre $t_m > 0$. Allora

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{y^2(t)} - e^{t^2} = e^{y^2(t)}(1 - e^{t^2 - y^2(t)}) \\ &\geq e^{y^2(t)}(1 - e^{(1-m^2)t^2}) \geq e^{y^2(t)}(1 - e^{(1-m^2)t_m^2}). \end{aligned}$$

Allora $y(t)$ è soprasoluzione relativa all'equazione $z' = c_m e^{z^2}$, con $c_m = 1 - e^{(1-m^2)t_m^2} > 0$, la quale ha tutte le soluzioni che esplodono in tempo finito in futuro (verificarlo per esercizio), dunque $\beta < +\infty$.

Esercizio 6.16 Data l'equazione di ordine due

$$y'' = e^y y'$$

- a) verificare che le costanti sono soluzioni e che quelle non costanti sono strettamente monotone;
- b) trovare la soluzione massimale tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = v$ con $v > 1$.

SOLUZIONE. a) Poiché il campo vettoriale è C^∞ ci sono esistenza e unicità globale per i relativi problemi di Cauchy. La verifica che le costanti sono soluzioni è banale. Fissato poi un dato di Cauchy $(y(0), y'(0)) = (y_0, y'_0)$ se $y'_0 = 0$ l'unica soluzione è $\bar{y}(t) = y_0$; se $y'_0 \neq 0$ allora la derivata della soluzione $\bar{y}(t)$ non può mai annullarsi. Se fosse infatti $\bar{y}'(\tau) = 0$ per qualche τ , poiché l'equazione è autonoma $\bar{y}(t)$ sarebbe anche soluzione del problema di Cauchy con dati $y(\tau) = \bar{y}(\tau)$, $y'(\tau) = 0$, ma tale soluzione è identicamente uguale a $\bar{y}(t)$ da cui $\bar{y}' \equiv 0$, assurdo. Allora la derivata di $\bar{y}(t)$ non si annulla mai e per continuità ha segno costante dunque $\bar{y}(t)$ è strettamente monotona.

b) Tenendo conto che $y(0) = 0$ e $y'(0) = v$, integrando si ottiene

$$\int_0^t y''(s) ds = \int_0^t e^{y(s)} y'(s) ds \quad \implies \quad y'(t) - v = e^{y(t)} - 1,$$

equazione a variabili separabili. Separando le variabili si ottiene

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{v - 1 + e^z} dz = \int_0^t ds = t.$$

Mediante la sostituzione $w = e^{-z}$ e tenendo conto che $v > 1$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{y(t)} \frac{1}{v - 1 + e^z} dz &= \int_0^{y(t)} \frac{e^{-z}}{(v-1)e^{-z} + 1} dz = - \int_1^{e^{-y(t)}} \frac{1}{(v-1)w + 1} dw \\ &= - \left[\frac{\ln |(v-1)w + 1|}{v-1} \right]_1^{e^{-y(t)}} = \frac{1}{1-v} \ln \frac{(v-1)e^{-y(t)} + 1}{v}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi l'equazione

$$\frac{1}{1-v} \ln \frac{(v-1)e^{-y(t)} + 1}{v} = t$$

che risolta in $y(t)$ fornisce la soluzione

$$y(t) = \ln \frac{v-1}{ve^{(1-v)t} - 1}.$$

Si osservi che $y(t)$ è definita in $] \alpha, \beta[=] - \infty, \frac{\ln v}{v-1}[$ e che $\lim_{t \rightarrow \beta^-} y(t) = +\infty$ cioè la soluzione esplode in tempo finito in futuro, il che doveva essere aspettato poiché il campo vettoriale ha un andamento esponenziale in y (e lineare in y') per $y \rightarrow +\infty$ e la velocità iniziale è positiva.

Esercizio 6.17 Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $y' = \sqrt{|y+t|}$, $y(0) = 0$ (si veda anche l'Esercizio 4.20). Studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)/t$ e dimostrare che $y(t)$ è asintotica a $t^2/4$ per $t \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE. La soluzione $y(t)$ è crescente, perciò per monotonia esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \in]0, +\infty]$. Essendo in ogni caso $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{|y(t)+t|} = +\infty$, per il criterio dell'asintoto non può che essere $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. Per il Teorema di de-L'Hôpital segue subito che $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)/t \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = +\infty$. Per $t > 0$ la soluzione è positiva e di classe C^∞ ; derivando l'equazione si ricava quindi

$$y''(t) = \frac{y'(t)+1}{2\sqrt{y(t)+t}} = \frac{\sqrt{y(t)+t}+1}{2\sqrt{y(t)+t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{y(t)+t}}.$$

Sempre per il Teorema di de-L'Hôpital si ottiene allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{t^2} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y'(t)}{2t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y''(t)}{2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{y(t)+t}} \right) = \frac{1}{4},$$

da cui segue che $y(t)$ è asintotica a $t^2/4$ per $t \rightarrow +\infty$. L'analisi della soluzione terminerà nell'Esercizio 12.1.

Esercizio 6.18 Nelle notazioni di p. 40, data per nota l'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore di $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, si dimostri che per ogni $t^* > t_0$ e ogni y^* tale che $y(t^*) \leq y^* \leq \bar{y}(t^*)$ esiste almeno una soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy tale che $y(t^*) = y^*$.

Esercizio 6.19 Sia data l'equazione $y' = f(y)$ dove $f \in C^1(\mathbb{R})$ è non negativa e crescente.

- a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione è definita globalmente in passato. (Suggerimento: trovare un'opportuna funzione lineare/affine che sia sottosoluzione.)
- b) È ancora vero il punto a) nel caso in cui f è crescente ma di segno variabile? E se è non negativa e non crescente?

Esercizio 6.20 Dimostrare la seguente generalizzazione del Lemma di Gronwall: sia $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua per la quale esistono $\alpha \geq 0$, $t_0 \in I$ e una funzione continua $h = h(t, v) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e crescente in v , tali che

$$v(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t h(s, v(s)) ds \quad \text{per } t \geq t_0.$$

- a) Dimostrare che $v(t) \leq y(t)$ per $t \geq t_0$, dove $y(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$(6.1) \quad \begin{cases} y' = h(t, y) \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

- b) Supposto che h non sia localmente lipschitziana, è ancora vero il punto a) prendendo come $y(t)$ una qualsiasi soluzione di (6.1)? In caso negativo fornire un controesempio e provare a suggerire qualche ipotesi da aggiungere affinché il risultato continui a essere vero.

Esercizio 6.21 È noto che se l'orbita di un sistema planare autonomo con campo vettoriale di classe C^1 è contenuta in una curva chiusa semplice priva di punti di equilibrio allora l'orbita è periodica. È ancora vero se il sistema non è autonomo? In caso affermativo provarlo, altrimenti fornire un controesempio.

Analisi di un sistema di Lotka-Volterra: caso dell'estinzione

Si consideri il seguente sistema nel piano

$$(6.2) \quad \begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = y(1 - 2x - 2y), \end{cases}$$

caso particolare di una classe più generale di sistemi, detti *sistemi di Lotka-Volterra* del tipo

$$(6.3) \quad \begin{cases} x' = b_1x + c_1y + x(a_{11}x + a_{12}y) \\ y' = c_2x + b_2y + y(a_{21}x + a_{22}y), \end{cases}$$

che modellano l'evoluzione di due popolazioni omogenee, di cui x e y rappresentano il numero di individui o la loro densità, che coabitano il medesimo ambiente. A seconda del segno dei coefficienti b_i , c_i e a_{ij} , questi sistemi permettono di modellare situazioni di cooperazione o competizione tra le due specie, oppure situazioni di tipo preda-predatore nelle quali una specie si ciba dell'altra. Il caso in oggetto e in generale i sistemi

$$(6.4) \quad \begin{cases} x' = x(b_1 - a_{11}x - a_{12}y) \\ y' = y(b_2 - a_{21}x - a_{22}y), \end{cases}$$

con b_i , a_{ij} non negativi, trattano il caso della *competizione* tra le due specie. I numeri a_{ij} , $i \neq j$, si dicono *coefficienti di competizione interspecifica* e vogliono rappresentare la diminuzione del tasso di crescita di una popolazione dovuta alla presenza dell'altra, mentre a_{ii} si dicono *coefficienti di competizione intraspecifica* e tengono conto della competizione per il cibo tra individui della stessa specie. Infine i coefficienti b_i rappresentano il tasso di crescita che ciascuna delle due specie avrebbe in assenza dell'altra specie e in assenza di competizione (ciò è plausibile finché le risorse disponibili sono di gran lunga superiori al fabbisogno globale della popolazione).

Vogliamo ora studiare qualitativamente il comportamento delle soluzioni di (6.2). Anzitutto, vista l'interpretazione di x, y , ci limiteremo a studiare il sistema nel primo quadrante $\mathcal{D} := \{(x, y) : x, y \geq 0\}$. Il campo vettoriale $f(x, y) = (x(1 - x - y), y(1 - 2x - 2y))$ è autonomo e di classe C^∞ in \mathcal{D} (anzi in tutto \mathbb{R}^2), dunque ci sono esistenza e unicità locale delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati. A causa dei termini x^2 , xy e y^2 , f ha crescita quadratica, dunque non si possono applicare i teoremi di esistenza globale 4.12 e 4.13. In virtù del Corollario 6.11, gli equilibri di un sistema autonomo hanno un ampio rilievo perché concorrono alla descrizione del possibile comportamento asintotico delle soluzioni, di notevole importanza nella descrizione dell'evoluzione di sistemi biologici quali quello in considerazione. Ricordando che gli equilibri sono soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, se ne ottengono tre e precisamente $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (1, 0)$ e $E_3 = (0, 1/2)$. In relazione a ciascun equilibrio assume particolare rilevanza la sua *stabilità* (in questo caso, stabilità in futuro). Non entreremo qui nel dettaglio delle

definizioni, argomento di corsi più avanzati, ma ci limiteremo a fornire le idee di base. Essenzialmente, un equilibrio y_0 di un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ si dice

STABILE: se le orbite che partono da punti vicini a y_0 rimangono per sempre vicine a y_0 ;

ASINTOTICAMENTE STABILE: se oltre a essere stabili, le orbite che partono da punti vicini a y_0 tendono a y_0 ;

INSTABILE: se esistono orbite che partono da punti arbitrariamente vicini a y_0 e si allontanano da y_0 .

Lo studio della stabilità degli equilibri di un sistema non lineare, quale quello in oggetto, è *localmente* ricondotto a quello di un opportuno sistema lineare. Per dare un'idea, supponiamo che y_0 sia equilibrio del sistema autonomo $y' = f(y)$ con f di classe C^1 ; è allora possibile sviluppare f mediante il polinomio di Taylor in y_0 ottenendo $f(y) = f(y_0) + Df(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$ dove $o(y - y_0)$ è una funzione tale che $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{o(y - y_0)}{\|y - y_0\|} = 0$. Essendo $f(y_0) = 0$ si ha quindi che

$$y' = f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y' = Df(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0).$$

Se $\|y - y_0\|$ è piccola, cioè localmente vicino a y_0 , il termine $o(y - y_0)$ è in generale trascurabile rispetto a $Df(y_0)(y - y_0)$ (ciò accade, per esempio, se $Df(y_0)$ è non singolare); per il Lemma 5.11 e il Teorema 5.12 le soluzioni dell'equazione $y' = f(y)$ possono essere approssimate, localmente vicino a y_0 e per intervalli di tempo limitati, dalle soluzioni di $y' = Df(y_0)(y - y_0)$. Operando la trasformazione $z = y - y_0$ quest'ultimo si può scrivere come $z' = Df(y_0)z$ ed è un sistema lineare a coefficienti costanti, detto *sistema linearizzato nel punto di equilibrio* y_0 (per i sistemi lineari a coefficienti costanti si veda la sezione dedicata nel Capitolo 9). All'equilibrio y_0 di $y' = f(y)$ corrisponde l'equilibrio $z_0 = 0$ di $z' = Df(y_0)z$. Si può dunque sperare che lo studio di z_0 possa dare indicazioni anche su y_0 . In effetti è possibile dimostrare i seguenti risultati, dei quali omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.22 *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^2 e sia y_0 un equilibrio per l'equazione $y' = f(y)$. Se $Df(y_0)$ non ha autovalori con parte reale nulla, allora la stabilità di y_0 è analoga alla stabilità dell'equilibrio $z_0 = 0$ per il sistema linearizzato $z' = Df(y_0)z$, dove $z = y - y_0$. In particolare*

i) y_0 è asintoticamente stabile per $y' = f(y)$ se e solo se 0 è asintoticamente stabile per $z' = Df(y_0)z$;

ii) y_0 è instabile per $y' = f(y)$ se e solo se 0 è instabile per $z' = Df(y_0)z$.

In particolare la dinamica locale di $y' = f(y)$ vicino a y_0 è analoga a quella di $z' = Df(y_0)z$ vicino a $z_0 = 0$. In generale, la *stabilità lineare* di y_0 è per definizione la stabilità di 0 per l'equazione linearizzata $z' = Df(y_0)z$; di conseguenza si parlerà anche di *equilibrio linearmente stabile/instabile*. Inoltre, per rendere più chiara la differenza, la stabilità di y_0 viene anche detta *stabilità nonlineare* di y_0 . In conclusione, nelle ipotesi del teorema precedente si è dimostrato che y_0 è stabile/instabile se e solo se è linearmente stabile/instabile. Resta ora da studiare la stabilità dell'origine per sistemi lineari; a tal fine viene in aiuto il seguente teorema.

Teorema 6.23 *Dato il sistema lineare $n \times n$ a coefficienti costanti $z' = Az$, $A \in \mathcal{M}_n$, allora*

- i) *se ogni autovalore di A ha parte reale negativa, l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile;*
- ii) *se ogni autovalore di A ha parte reale minore o uguale a 0, e gli autovalori con parte reale nulla hanno molteplicità algebrica 1, allora l'origine è un equilibrio stabile;*
- iii) *se esistono autovalori di A con parte reale positiva, l'origine è un equilibrio instabile.*

Applichiamo questi risultati al sistema (6.2). Il differenziale di f nel generico punto (x, y) è dato da

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -2y & 1 - 2x - 4y \end{pmatrix},$$

in particolare

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Df(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Df(0, 1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice ha un unico autovalore reale e positivo dunque, per i Teoremi 6.23 e 6.22 E_1 è un equilibrio linearmente e nonlinearmemente instabile; la seconda matrice ha un unico autovalore reale e negativo quindi E_2 è linearmente e nonlinearmemente asintoticamente stabile; infine, la terza matrice ha un autovalore negativo e uno positivo dunque anche E_3 è instabile. In definitiva, le soluzioni che partono vicino a $(0, 0)$ tendono ad allontanarsi

dall'equilibrio e analogamente per quelle che partono vicino a $(0, 1/2)$ (purché sia $x(t) \neq 0$). Invece, le soluzioni che partono vicino a $E_2 = (1, 0)$ sono attratte dall'equilibrio stesso. Vogliamo ora dimostrare che *tutte* le soluzioni che partono all'interno del quadrante sono attratte da E_2 .

Anzitutto, fissato un dato iniziale (x_0, y_0) , se $x_0 = 0$ allora $x(t) \equiv 0$ soddisfa la prima equazione, mentre la seconda si riduce a $y' = y(1 - 2y)$, $y(0) = y_0$ con soluzione denotata con $y(t)$. Per unicità, la soluzione è allora della forma $(0, y(t))$ con orbita contenuta nell'asse $x = 0$. In questo caso l'asse y è un cosiddetto *insieme invariante*.

Definizione 6.24 *Un insieme M si dice positivamente (risp. negativamente) invariante rispetto all'equazione $y' = f(t, y)$, se per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ tale che $y_0 \in M$, ogni soluzione massimale $y(t)$ del problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ è tale che $y(t) \in M$ per ogni $t \geq t_0$ (rispet. $t \leq t_0$). Un insieme M si dice invariante se è contemporaneamente positivamente e negativamente invariante.*

In altri termini, un insieme M è invariante se ogni soluzione che ha origine da un suo punto rimane sempre dentro M per ogni tempo. Nel caso in considerazione l'asse y è dunque un insieme invariante. Analogamente, se $y_0 = 0$ la soluzione è del tipo $(x(t), 0)$ e anche l'asse x è invariante. Se ora $x_0, y_0 > 0$ cioè si parte all'interno del quadrante \mathcal{D} , detta $(x(t), y(t))$ la relativa soluzione, per l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, nessuna delle sue componenti potrà mai annullarsi. Dovesse infatti essere $x(t_1) = 0$ (analog. $y(t_1) = 0$) si otterrebbe una contraddizione con l'unicità della soluzione passante in $(0, y(t_1))$ al tempo t_1 . In definitiva si avrà $x(t), y(t) > 0$ per ogni tempo t di definizione, dunque anche il quadrante aperto è un insieme invariante. Per proseguire l'analisi conviene studiare il segno delle componenti del campo vettoriale f ; ciò permette di dividere il piano in regioni nelle quali la direzione di f è simile e in definitiva di avere un'idea del comportamento delle orbite delle soluzioni. Limitandoci a \mathcal{D} , la prima componente di f è positiva nel semipiano inferiore alla retta di equazione $x + y = 1$ e si annulla su di essa, la seconda componente è positiva nel semipiano inferiore alla retta di equazione $x + y = 1/2$ e si annulla su di essa. Un quadro globale della direzione del campo vettoriale nelle varie regioni di piano si può vedere in a) di Figura 6.4.

Intuitivamente, preso un dato iniziale (x_0, y_0) con $x_0 + y_0 < 1/2$ la relativa soluzione interseca la retta $x + y = 1/2$ in tempo finito. Infatti, se per assurdo ciò non fosse vero, ovvero se fosse $x(t) + y(t) < 1/2$ per ogni t di definizione, non potendo nemmeno uscire attraversando gli assi, la soluzione rimarrebbe per sempre all'interno del triangolo $\mathcal{T} := \{(x, y) : x, y > 0, x +$

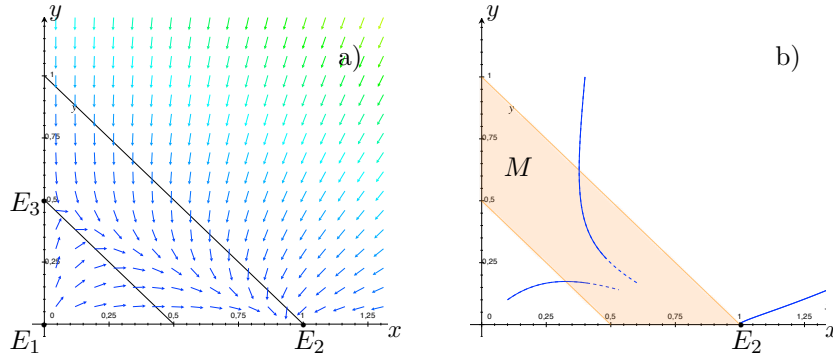


Figura 6.4: a) L'andamento del campo vettoriale; b) l'insieme invariante M

$y < 1/2$ }. Essendo \mathcal{T} limitato, l'orbita sarebbe contenuta in un compatto e per il Teorema della fuga dai compatti la soluzione sarebbe globalmente definita in futuro, cioè in $[0, +\infty[$. Inoltre, essendo $(x(t), y(t)) \in \mathcal{T}$ per ogni $t > 0$ si avrebbe $x'(t) > 0$ e $y'(t) > 0$ per gli stessi t , dunque le componenti sarebbero monotone crescenti e ammetterebbero limiti x_∞ e, rispettivamente, y_∞ per $t \rightarrow +\infty$. Essendo $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2$ per il Corollario 6.11 il punto (x_∞, y_∞) sarebbe un equilibrio contenuto, per confronto, nel triangolo $\mathcal{T}_1 := \{(x, y) : x \geq x_0, y \geq y_0, x + y \leq 1/2\}$, assurdo perché in \mathcal{T}_1 non ci sono equilibri. In definitiva esiste $t_1 > 0$ tale che $x(t_1) + y(t_1) = 1/2$. Analogamente, se $x_0 + y_0 > 1$, o esiste un tempo t_1 tale che $x(t_1) + y(t_1) = 1$, oppure la soluzione $(x(t), y(t))$ verifica $x(t) + y(t) > 1$ per ogni t , e un ragionamento simile permette di dimostrare che tende a un equilibrio contenuto in $\{x + y \geq 1\}$, il quale non può che essere E_2 .

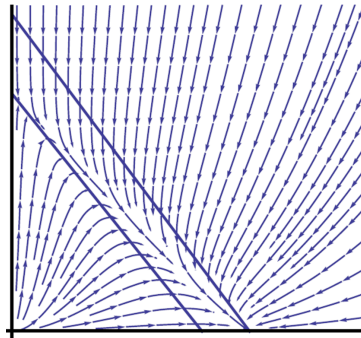


Figura 6.5: Quadro globale delle soluzioni

In definitiva, preso un qualsiasi dato iniziale (x_0, y_0) con $x_0, y_0 > 0$, la

relativa soluzione o tende a E_2 oppure entra (se non lo è già) in tempo finito nell'insieme $M := \{(x, y) : x, y > 0, 1/2 \leq x + y \leq 1\}$ (si veda b) di Figura 6.4). Dimostriamo che l'insieme M è un insieme invariante cioè che le soluzioni, una volta entrate, non possono più uscirne. Infatti, una soluzione potrebbe uscire da M solamente attraverso una delle due parti della frontiera $x + y = 1/2$ oppure $x + y = 1$ sulle quali, rispettivamente, la seconda oppure la prima componente del campo vettoriale si annulla. Se esistesse un tempo $t_2 > t_1$ per cui $x(t_2) + y(t_2) = 1/2$ e la soluzione stesse dentro M in $[t_1, t_2]$ si avrebbe $y'(t_2) = 0$ e $x'(t_2) > 0$. Derivando la seconda equazione del sistema un'altra volta rispetto a t

$$y''(t) = y'(t) - 2y'(t)x(t) - 2y(t)x'(t) - 4y(t)y'(t),$$

e sostituendo $t = t_2$ si otterrebbe $y''(t_2) = -2y(t_2)x'(t_2) < 0$. Il punto t_2 sarebbe quindi un punto di massimo per la funzione $t \mapsto y(t)$, assurdo perché in $[t_1, t_2[$ la soluzione sta in M per cui $y'(t) < 0$ e $y(t)$ è ivi decrescente. Analogamente si trova un assurdo nel caso in cui $x(t_2) + y(t_2) = 1$. In conclusione, se una soluzione è contenuta in M per $t = t_1$, rimarrà in M per ogni $t > t_1$. Dalla compattezza di M segue che la soluzione è globalmente definita in $[t_1, +\infty[$. Come prima si ottiene che $x'(t) > 0$ e $y'(t) < 0$ cioè $x(t)$ è crescente mentre $y(t)$ è decrescente, e per monotonia esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_\infty, y_\infty) \in \bar{M}$. Per la conseguenza del criterio dell'asintoto (x_∞, y_∞) è un equilibrio e dovendo essere $x_\infty > x(t) > x(t_1) > 0$ non può che essere $(x_\infty, y_\infty) = (1, 0) = E_2$.

In definitiva si è provato che ogni soluzione con dati iniziali appartenenti all'interno di \mathcal{D} converge all'equilibrio E_2 per $t \rightarrow +\infty$: il microcosmo favorisce la prima popolazione che tende a un valore d'equilibrio finito, a discapito della seconda che tende a estinguersi. Il quadro complessivo delle soluzioni si può osservare in Figura 6.5.