Analisi Matematica 1

Secondo Compitino

06/05/2020

Domande a risposta multipla (una sola risposta è esatta):

Esercizio 1. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa integrabile in senso improprio. Allora

(1) $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
(2) $\lim_{n\to+\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_n^{n+m} f = 0$;
(3) esiste $R > 0$ tale che f è decrescente su $(R, +\infty)$;
(4) esistono $R > 0$ e una funzione decrescente $g : [R, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che $g \geq f$ e g è integrabile in senso improprio.

Esercizio 2. Sia $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata di classe C^1. Supponiamo che la funzione $G : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(x) = \int_x^{x+1} s f'(s)\, ds,$$

sia limitata. Allora

(1) $xf'(x)$ è integrabile in senso improprio su $(1, +\infty)$;
(2) f è integrabile in senso improprio su $(1, +\infty)$;
(3) $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$;
(4) $\lim_{x\to\infty} f(x + 1) - f(x) = 0$.

Esercizio 3. L'equazione $y' = f(y)$ con

$$f(y) = \begin{cases} |1 - y|^{\frac{1}{4}} y^2 \log(|y|) & y \neq 0, \\ 0 & y = 0, \end{cases}$$

(1) soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per ogni scelta di dati iniziali;
(2) non ha soluzioni costanti diverse da zero;
(3) non ha soluzioni massimali definite su $\mathbb{R}$;
(4) tutte le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. L'equazione

$$y'(x) = \frac{-e^{-x} + e^x}{y - y^2}$$

(1) ha soluzioni con asintoti verticali;
(2) non ha soluzioni massimali definite su tutto $\mathbb{R}$;
(3) ha soluzioni costanti;
(4) ha soluzioni massimali definite su intervalli strettamente contenuti in $\mathbb{R}$.

Domande a risposta breve:

Esercizio 5. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in (0, +\infty)$ il seguente integrale converge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^{2a}} - 1}{(1 + x^{2a}) \arctan(x^b) \log((1 + x)^a)}\, dx.$$

Esercizio 6. Dire per quali valori del parametro $a \in (0, +\infty)$ il seguente integrale converge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} |\sin(x^a)|}{x[(1 - e^{-x})^{2a} - 1]}\, dx.$$

Esercizio 7. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = x \sin(x).$$

SOLUZIONI

Soluzione 1. Domande a risposta multipla:

- 2.
- 4 (si vede integrando per parti; la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ fornisce un controesempio alle altre risposte).
- 1.
- 4.

Soluzione 2. Domande a risposta breve:

- Nell'intorno di zero l'integranda si comporta come $\frac{-1}{x^{b+1-2a}}$ e quindi qui l'integrale converge se e solo se $b < 2a$. Poi per $x \to \infty$ abbiamo
$$\frac{e^{-x^{2a}} - 1}{(1 + x^{2a}) \arctan(x^b) \log((1 + x)^a)} \sim -\frac{2}{\pi}\frac{1}{a}\frac{1}{x^{2a}\log x}$$
e quindi l'integrale converge in un intorno di infinito se e solo se $2a > 1$. Riassumendo, l'integrale converge se e solo se
$$a > \frac{1}{2}, \qquad b < 2a.$$
- Vicino a zero l'integranda si comporta come $\frac{1}{x^{1-a}}$ che converge per ogni $a > 0$. Per $x \to \infty$ si ha
$$(1 - e^{-x})^{2a} - 1 = \left(2ae^{-x} + \frac{2a(2a-1)}{2}e^{-2x}\right)(1 + o(1)).$$
Quindi per $a \neq 1$ per $x \to \infty$ l'integranda è
$$\sim \frac{e^{-ax}}{2ae^{-x}}\frac{|\sin(x^a)|}{x},$$
il cui integrale converge se e solo se $a > 1$. Infine per $a = 1$ troviamo
$$\sim \frac{1}{2}\frac{|\sin(x^a)|}{x},$$
il cui integrale non converge (si vede sostituendo $y = x^a$).
Riassumendo, l'integrale converge se e solo se $a > 1$.
- Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ ha come radici $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, da cui segue che la soluzione dell'omogenea è
$$y_o(x) = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x.$$
Imponendo che $\bar{y}(x) = (a + bx)e^{ix}$ risolva
$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^{ix},$$
troviamo $a = -\frac{2}{25} + \frac{14}{25}i$ e $b = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è
$$y_p(x) = \mathrm{Im}(\bar{y}(x)) = -\frac{2}{25}\sin x + \frac{14}{25}\cos x + \frac{1}{5}x\sin x - \frac{2}{5}x\cos x.$$