

# Esercizi

1 dicembre 1999

1. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- i) se  $x > 0$ , allora  $f(x) < 0$ ;
  - ii) esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $f(x) < 0$  per ogni  $x > \varepsilon$ ;
  - iii) per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\eta > 0$  tale che per ogni  $x > \eta$  si ha  $f(x) > \varepsilon$ .
2. Dire in quali dei seguenti casi esiste il limite e determinarlo;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \cos x^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

3. Dimostrare che se  $f : A = (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione decrescente, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{x \in A} f(x).$$

4. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; dimostrare che esiste un  $\delta > 0$  tale che  $f(x) > \delta$  per ogni  $x \in [a, b]$ .
5. Dimostrare che una funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monotona é continua se e solo se  $f((a, b))$  é un intervallo.
6. Dimostrare che se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione continua e monotona, allora  $f^{-1}$  é continua.
7. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua; dimostrare che se l'immagine di  $f$  é un insieme discreto, allora  $f$  é costante.
8. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $P(x)$  un polinomio non nullo; dimostrare che se  $P(f(x)) = 0$ , allora  $f$  é costante.

9. Dimostrare che ogni polinomio di grado dispari ammette almeno una radice.
10. Sia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una funzione continua; dimostrare che esiste almeno un punto  $x_0 \in [0, 1]$  tale che  $f(x_0) = x_0$ .
11. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che  $f(x) = ax$  per un qualche  $a \in \mathbb{R}$ .

12. Definiamo la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q, \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ primi tra loro,} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dimostrare che  $f$  é continua sugli irrazionali ed é discontinua sui razionali.

13. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione uniformemente continua con  $A$  limitato; dimostrare che  $f(A)$  é limitato.
14. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione Lipschitziana; dimostrare che  $f$  é uniformemente continua.
15. Per ogni  $f, g \in \mathcal{C}(a, b)$  definiamo

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Dimostrare che  $d$  definisce una distanza su  $\mathcal{C}(a, b)$ .

16. Dimostrare il teorema di Cauchy: date due funzioni  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e derivabili in  $(a, b)$ , allora esiste  $\xi \in (a, b)$  tale che

$$(f(b) - f(a)) g'(\xi) = (g(b) - g(a)) f'(\xi).$$

17. Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e derivabile in  $(a, b) \setminus \{x_0\}$  tale che  $f'(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$ . Dimostrare che  $f$  é derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) = l$ .
18. Dimostrare che se  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ , allora  $f$  é Lipschitziana in  $[a, b]$
19. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che esistono  $C > 0$  e  $k > 1$  per cui

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che  $f$  é costante.

20. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $x_0 \in (a, b)$ ; dimostrare che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx = f(x_0).$$

21. Dire se é vero o falso che se  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione con  $f^2$  integrabile é integrabile.
22. Data  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , indichiamo con  $f(x) \vee 0 = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f(x) \wedge 0 = \min\{f(x), 0\}$ . Dimostrare che se  $f$  é integrabile secondo Riemann, allora sono integrabili pure  $f \vee 0$ ,  $f \wedge 0$  e  $|f|$ .
23. Dimostrare che se  $f, g$  sono due funzioni Riemann integrabili, allora  $f \cdot g$  é integrabile secondo Riemann.
24. Sia  $f$  una funzione integrabile secondo Riemann continua in  $x_0 \in (a, b)$ ; dimostrare che la funzione integrale  $F$  é derivabile in  $x_0$  e vale  $F'(x_0) = f(x_0)$ .
25. Dimostrare che se  $f$  é derivabile in un punto  $x_0$ , allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Dimostrare con un controesempio che non vale l'implicazione inversa.