Esercizi del 17 novembre '99

Avvertenza: Gli esercizi vanno svolti *per iscritto* e in forma *completa*. Ogni affermazione va o dimostrata o confutata con un controesempio.

1) Sia $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continua, tale che $f(0) = 0$ e $f(t) > 0$ per ogni $t \in (0,1]$. Dire se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f : [0,\varepsilon] \mapsto \mathbb{R}$ è *monotona*.

2) Dimostrare la seguente Proposizione dovuta a Darboux:

   Sia $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ *derivabile e siano* x_1, x_2 *due punti in* (a,b). *Allora* f' *assume tutti i valori tra* $f'(x_1)$ *e* $f'(x_2)$.

   (Questo esercizio si trova anche alla fine del Capitolo III del Giaquinta-Modica, dove viene dato un utile suggerimento).

3) Trovare una funzione $f : (-1,1) \mapsto \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto, tale che f' *non* sia continua. Si dica se esiste una funzione $f : (-1,1) \mapsto \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto tale che f' sia data da:

$$f'(t) = 0 \quad \forall t \in (-1,0), \qquad f'(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1)$$