Ancora limiti e derivate in più variabili

11 ottobre 2001

1. Si provi che la funzione $f\colon \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x \neq 0\} \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^5}{|x|}$$
non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$.

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{|y|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Si verifichi che
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \neq \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$
e che non esiste il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

3. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x,y) = (x^2+y^2)\chi_{\mathbf{Q}}(x)$$
dove $\chi_{\mathbf{Q}}(x)$ è la funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali. Verificare che
   (a) f è continua e differenziabile nel punto $(0,0)$;
   (b) per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste il $\lim_{y\to 0} f(x,y)$;
   (c) esiste il $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$;
   (d) per $y \neq 0$ non esiste il $\lim_{x\to 0} f(x,y)$.

4. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua nel punto $(0,0)$. Supponiamo inoltre che per ogni x esista il limite $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ e che per ogni y esista il limite $\lim_{x\to 0} f(x,y)$. Dimostrare allora che i seguenti limiti esistono e vale
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = f(0,0).$$