Analisi Matematica Due
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

17 dicembre 2001

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \sin x$$

e dire se sono massimi o minimi relativi.

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali di f:

$$f_x(x, y) = 2x - 2y \cos x, \quad f_y(x, y) = 2y - 2 \sin x.$$

I punti critici sono quelli in cui si annullano entrambe le derivate parziali. Da $f_y = 0$ otteniamo $y = \sin x$ che sostituendo in $f_x = 0$ ci dà $0 = 2x - 2 \sin x \cos x = 2x - \sin(2x)$ che ha come unica soluzione $x = 0$ (ricordiamo che $-|t| \leq \sin t \leq |t|$). Dunque l'unico punto critico è il punto $(0, 0)$.

Per sapere se il punto è un massimo o un minimo relativo proviamo a calcolare la matrice delle derivate seconde nel punto critico

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2y \cos x & -2 \cos x \\ -2 \cos x & 2 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Siccome il determinante hessiano risulta nullo non otteniamo ulteriori informazioni dalle derivate seconde e dovremo utilizzare un metodo alternativo. Proponiamo due possibili soluzioni.

(a) *Primo metodo.* Studiamo il luogo dei punti in cui si annulla la derivata parziale f_y. Tale luogo è la curva $y = \sin x$. Al di sopra di tale curva si ha $f_y > 0$ e al di sotto si ha $f_y < 0$ dunque rispetto alla direzione "verticale" la curva $y = \sin x$ è formata da punti di minimo (assoluto). Studiamo l'andamento della funzione sulla curva, cioè studiamo la funzione $g(x) = f(x, \sin x)$. Si ha $g(x) = x^2 + \sin^2 x - 2 \sin^2 x = x^2 - \sin^2 x$, e $g'(x) = 2x - 2 \sin x \cos x = 2x - \sin(2x)$. Si verifica che $g'(x)$ ha lo stesso segno di x cioè il punto $(0, 0)$ è di minimo (assoluto) tra tutti i punti della curva $y = \sin x$. In conclusione il punto critico $(0, 0)$ risulta quindi essere un minimo locale (anzi assoluto), in quanto preso un qualunque punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha $f(x, y) \geq f(x, \sin x) \geq f(0, 0)$.

(b) *Secondo metodo.* Proviamo a studiare il segno di $f(x,y) - f(0,0)$. Ricordando che $|\sin t| \leq |t|$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= x^2 + y^2 - 2y \sin x \geq x^2 + y^2 - |2y \sin x| \\ &\geq x^2 + y^2 - 2|xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

vale a dire $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

2. Si considerino le due successioni di funzioni

$$f_k(x) = \frac{1}{1+x^{2k}}, \quad g_k(x) = \frac{1-x^2}{1+x^{2k}}.$$

Si verifichi che

(a) la successione f_k converge puntualmente ma non uniformemente su $\mathbf{R}$;

(b) la successione g_k converge puntualmente e uniformemente su $\mathbf{R}$.

Soluzione.

(a) Notando che x^{2k} converge a 0 se $|x| < 1$, diverge a $+\infty$ se $|x| > 1$ ed è costantemente 1 se $|x| = 1$ si trova che la successione f_k converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Siccome tutte le funzioni f_k sono continue, se la convergenza fosse uniforme anche f dovrebbe essere continua, cosa che non è. Dunque non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$.

(b) Analogamente a prima notiamo che la successione g_k converge puntualmente alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

In questo caso il limite g è una funzione continua quindi non possiamo escludere che ci sia convergenza uniforme. Per provare che effettivamente c'è convergenza uniforme cerchiamo di trovare una stima uniforme della quantità $|g_k(x) - g(x)|$.
Se $|x| \geq 1$ si ha

$$|g_k(x) - g(x)| = \frac{|1-x^2|}{1+x^{2k}} = \frac{x^2-1}{1+x^{2k}} \leq \frac{x^2-1}{x^{2k}}$$

Dobbiamo quindi trovare il massimo della funzione $\varphi(x) = (x^2 - 1)x^{-2k}$ sull'intervallo $[1, +\infty[$ (la funzione è simmetrica quindi possiamo tralasciare il caso $x \leq -1$). Studiando la derivata $\varphi'(x) =$

$2xx^{-2k} - 2k(x^2-1)x^{-2k-1} = 2x^{-2k-1}[k-(k-1)x^2]$ si nota che la funzione assume massimo nel punto $x = \sqrt{k/(k-1)}$ da cui si ottiene (per ogni x con $|x| \geq 1$)

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \varphi\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}}\right) = \frac{\frac{k}{k-1} - 1}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k} = \frac{\frac{1}{k-1}}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k}.$$

Notiamo ora che il denominatore dell'ultima uguaglianza tende al limite 'e' quando $k \to \infty$. Il numeratore invece tende a 0 e dunque si ottiene per confronto che $|g_k(x) - g(x)|$ tende a 0 uniformemente per $k \to \infty$ e $|x| \geq 1$.

Consideriamo ora i punti in cui $|x| < 1$. In questo caso si ottiene

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g(x)| &= \left|\frac{1-x^2}{1+x^{2k}} - (1-x^2)\right| = (1-x^2)\left(1 - \frac{1}{1+x^{2k}}\right) \\ &= (1-x^2)\frac{x^{2k}}{1+x^{2k}} \leq (1-x^2)x^{2k}. \end{aligned}$$

Analogamente a prima studiamo la funzione $\psi(x) = (1-x^2)x^{2k}$. Si trova $\psi'(x) = -2xx^{2k} + 2k(1-x^2)x^{2k-1} = 2x^{2k-1}[k-(1+k)x^2]$ e dunque si nota che la funzione assume il valore massimo nei punti $x^2 = k/(k+1)$. Dunque si ottiene la stima uniforme

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \psi\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right) = \left(1 - \frac{k}{k+1}\right)\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

anche in questo caso il secondo fattore converge per $k \to \infty$ al valore 'e' mentre il primo fattore tende a 0.

In conclusione la successione g_k converge uniformemente a g in entrambi gli insiemi $\{|x| \geq 1\}$ e $\{|x| < 1\}$ e dunque converge uniformemente a g su tutto $\mathbf{R}$.

3. Si consideri la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right).$$

   (a) Provare che la serie converge totalmente nell'intervallo $[0, 1]$.

   (b) Provare che la serie converge puntualmente nell'intervallo $]-1, 1]$.

   (c) (Facoltativo) Trovare esplicitamente la somma della serie.

   Soluzione. Consideriamo il termine generico della serie:

$$f_k(x) = \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2}.$$

(a) Si ha $f_k'(x) = x^{2k} - x^{2k+1} = x^{2k}(1-x)$. Dunque la funzione f_k è crescente per $x < 1$ e $f_k(0) = 0$. Dunque per ogni $x \in [0,1]$ si trova

$$|f_k(x)| \le f_k(1) = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \le \frac{1}{k^2}.$$

Essendo la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente si conclude che la serie di funzioni $\sum f_k$ è totalmente convergente su $[0,1]$.

(b) Se $|x| < 1$ notiamo che $x^{2k+2}/(2k+2) < |x|^{2k+1}/(2k+1) < |x|^{2k+1}$ da cui ricaviamo

$$0 \le f_k(x) \le 2|x|^{2k+1}.$$

ma la serie $\sum |x|^{2k+1}$ è convergente per $|x| < 1$ e quindi la serie data è convergente per $|x| < 1$. Per $x = 1$ la serie converge in quanto abbiamo già dimostrato che su tutto $[0,1]$ c'è convergenza totale. Dunque c'è convergenza puntuale su tutto $]-1,1]$.

(c) Notiamo che la serie delle derivate converge puntualmente per $x \in [0,1]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(1-x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = (1-x)\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}.$$

Inoltre la convergenza è uniforme su $[0,1-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$ in quanto la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e quindi converge uniformemente sull'intervallo $[0,1-\varepsilon]$. Dunque sull'intervallo $[0,1-\varepsilon]$ la serie data e la sua derivata convergono entrambe uniformemente. Ne consegue che la somma $f(x)$ della serie data ha come derivata $f'(x) = 1/(1+x)$ per $x \in [0,1-\varepsilon]$. Siccome $f(0) = 0$ si trova che $f(x) = \log(x)$ per $x \in [0,1-\varepsilon]$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario concludiamo che $f(x) = \log(1+x)$ per ogni $x \in [0,1[$. D'altra parte la serie data converge uniformemente su tutto l'intervallo $[0,1]$ quindi la funzione f deve essere continua su $[0,1]$, l'unica possibilità è che $f(x) = \log(1+x)$ per ogni $x \in [0,1]$.