Analisi Matematica Due, primo modulo
Soluzioni della prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

17 gennaio 2002

1. Trovare l'insieme dei punti in cui la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
$$f(x, y) = (|x| - x)y$$
   (a) ammette derivate parziali;
   (b) è differenziabile.

   Soluzione. Per $x > 0$ la funzione è identicamente nulla mentre per $x < 0$ si ha $f(x, y) = -2xy$, in entrambi i casi la funzione è quindi derivabile e differenziabile.

   (a) Per $x = 0$ la derivata parziale f_y esiste e vale $f_y = 0$ in quanto la funzione f è identicamente nulla sull'asse delle y. Per quanto riguarda la derivata parziale rispetto a x si ha, nel punto $(0, y)$
$$f_x(0, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{|h|}{h} - 1\right) y$$
   dunque tale derivata parziale esiste per $y = 0$ e vale $f_x(0, 0) = 0$ mentre per $y \neq 0$ i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono diversi (rispettivamente valgono 0 e $-2y$).

   (b) Per $x = 0$ e $y \neq 0$ la funzione non è differenziabile in quanto una delle derivate parziali non esiste. Verifichiamo ora, tramite la definizione, che la funzione è invece differenziabile in $(0, 0)$. Infatti si ha
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - hf_x(0, 0) - kf_y(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$
$$= \lim_{h,k} \to (0, 0) \frac{(|h| - h)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$
   essendo $\big|(|h| - h)k\big| \leq |2hk| \leq h^2 + k^2$.

2. Si consideri la seguente funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:
$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x.$$

(a) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.

(b) Trovare i valori massimo e minimo assunti da f sul disco $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione.

(a) Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + y^2 - 1, \\ f_y(x,y) &= 2xy. \end{aligned}$$

I punti critici di f sono i punti che annullano entrambe le derivate parziali. Per annullare f_y dovrà essere o $x = 0$ o $y = 0$. Se $x = 0$, per annullare f_x dovrà essere $y = \pm 1$. Se $y = 0$ dovrà invece essere $x = \pm\sqrt{3}/3$. I punti critici sono dunque quattro:

$$p_1 = (0,1), \quad p_2 = (0,-1), \quad p_3 = (\sqrt{3}/3, 0), \quad p_4 = (-\sqrt{3}/3, 0).$$

Per avere informazioni sulla natura dei punti critici calcoliamo la matrice delle derivate seconde di f

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

che nei punti critici vale rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Dallo studio della segnatura di queste matrici si trova che i punti critici sono rispettivamente: sella, sella, minimo e massimo.

(b) I punti critici interni al disco sono p_3 e p_4 in cui la funzione assume i valori $\mp 2\sqrt{3}/9$. Notiamo inoltre che $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)x$ e quindi sul bordo del disco $x^2 + y^2 = 1$ si ha $f = 0$. Dunque i valori massimo e minimo assunti da f sul disco sono i valori assunti nei due punti p_4 e p_3.

3. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = \frac{1}{|x|^k + k}.$$

(a) Provare che la successione f_k converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

(b) Trovare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Soluzione.

(a) Notiamo che vale

$$0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k} \to 0$$

e quindi la successione converge uniformemente a 0.

(b) Si ha

$$\sum_k |f_k(x)| \leq \sum_k \left(\frac{1}{|x|}\right)^k$$

e quindi c'è convergenza assoluta se $|x| > 1$ (non sarebbe difficile mostrare inoltre che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha convergenza totale sull'insieme $\{|x| > 1 + \varepsilon\}$).

D'altra parte se $|x| \leq 1$ si trova

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty$$

e quindi per $|x| \leq 1$ la serie non converge.