Definizione di limite e principio di induzione

7 ottobre 2002

1. Verificare mediante il principio di induzione le seguenti affermazioni
$$\forall n \geq 4 \quad 2^n \geq n^2$$
$$\forall n \geq 10 \quad 2^n \geq n^3$$
$$\forall n \geq 4 \quad n! \geq n^2.$$

2. Verificare, mediante la definizione, la validità dei seguenti limiti:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n+1} = -1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 42n^3 + 37}{2n^5 - 5n^4 + n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + (-1)^n}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 - 2^n = -\infty.$$

3. Verificare che i seguenti limiti non esistono:
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \sin(\pi n/4), \quad \lim_{n\to\infty} \sin(n).$$

4. Verificare la seguente proprietà. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (a può essere eventualmente anche $+\infty$ o $-\infty$) allora $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ qualunque sia la sottosuccessione[1] a_{n_k}.

[1] Ricordiamo che a_{n_k} è una sottosuccessione di a_n quando n_k è una qualunque successione strettamente crescente di numeri naturali