Analisi Matematica III modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

17 dicembre 2003

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = x^4 - 2y\arctan x + \frac{\pi}{16}y^2;$$
 (a) determinare i punti di massimo o minimo locale,
 (b) determinare l'insieme $f(\mathbb{R}^2)$ dei valori assunti da f.

Soluzione. Essendo f derivabile ed essendo il suo dominio $\mathbb{R}^2$ un insieme aperto, ogni eventuale punto di massimo o minimo relativo deve essere un punto critico di f. Determiniamo i punti critici imponendo che entrambe le derivate parziali di f si annullino:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - \frac{2y}{1+x^2} = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{\pi}{8}y - 2\arctan x = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 2x^3 + 2x^5 \\ y = \frac{16}{\pi}\arctan x \end{cases}$$

da cui si ricava
$$g(x) = 2x^3 + 2x^5 - \frac{16}{\pi}\arctan x = 0. \tag{1}$$

Notiamo innanzitutto che la funzione g è dispari, quindi $x_0 = 0$ è una soluzione e ogni soluzione positiva ha una corrispondente soluzione negativa. Dunque è sufficiente cercare le soluzioni positive. Essendo

$$g''(x) = 12x + 40x^3 + \frac{32}{\pi}\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

si nota che per $x > 0$ la funzione g è strettamente convessa. Dunque, essendo $g(0) = 0$ esiste al più una soluzione $x_1 > 0$ dell'equazione $g(x) = 0$. Per verifica diretta si trova che $x_1 = 1$ è una, e dunque l'unica, soluzione. In conclusione le soluzioni di (1) sono $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. In corrispondenza con queste soluzioni troviamo che i punti critici di f sono $(0,0)$, $(1,4)$ e $(-1,-4)$.

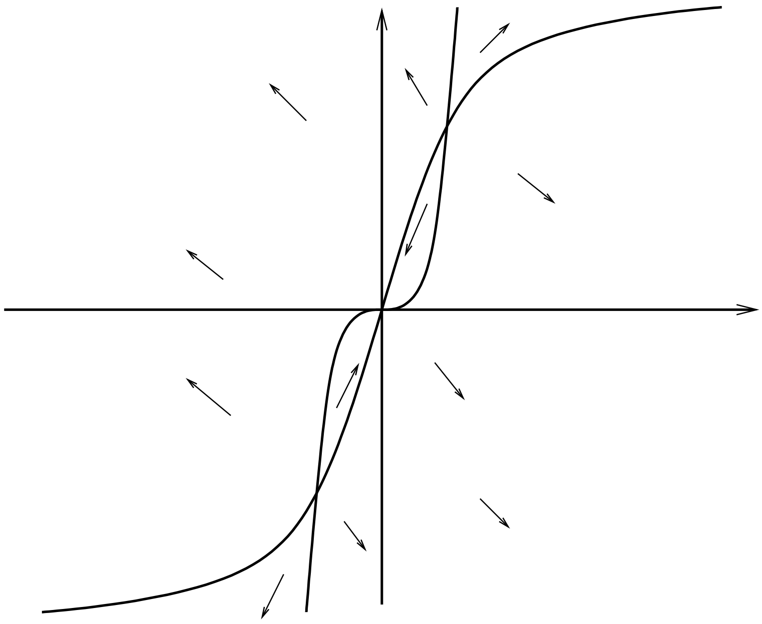
Calcoliamo la matrice delle derivate seconde di f:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + \frac{4xy}{(x^2+1)^2} & -\frac{2}{x^2+1} \\ -\frac{2}{x^2+1} & \frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

da cui si trova

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & \frac{\pi}{8} \end{pmatrix}, \qquad D^2f(1,4) = D^2f(-1,-4) = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -1 & \frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

e $\det D^2f(0,0) = -4$, $\det D^2f(\pm1,\pm4) = 2\pi - 1 > 0$. Il punto $(0,0)$ risulta essere un punto di sella mentre essendo $13 > 0$ i punti $(1,4)$ e $(-1,-4)$ sono punti di



minimo relativo. Non ci sono punti di massimo relativo. Abbiamo anche $f(1,4) = f(-1,-4) = 1 - \pi$.

Per quanto riguarda il punto (b) si nota facilmente che

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty$$

e dunque l'insieme dei valori assunti da f è superiormente illimitato ovvero si ha $\sup f(\mathbb{R}^2) = +\infty$.

Vogliamo ora dimostrare che la funzione ha come valore minimo $1 - \pi$ ovvero che i punti $(\pm 1, \pm 4)$ sono minimi assoluti. Una volta visto questo si può concludere che l'insieme dei valori assunti da f è l'intervallo $[1 - \pi, +\infty)$ in quanto essendo la funzione continua e il dominio connesso, tutti i valori compresi tra $1-\pi$ e $+\infty$ sono assunti.

Vediamo ora due metodi diversi per dimostrare che i punti $(\pm 1, \pm 4)$ sono minimi assoluti.

Primo metodo. Si può dimostrare che $(\pm 1, \pm 4)$ sono minimi assoluti studiando il segno delle derivate parziali di f. Posto

$$h(x) = \frac{16}{\pi} \arctan x$$

notiamo che $f_y(x,y) > 0$ se $y > h(x)$ e $f_y(x,y) < 0$ se $y < h(x)$. Mentre la derivata $f_x(x,y)$ è positiva quando $y < 2x^3 + 2x^5$ ed è negativa altrimenti. Si veda la figura.

Dato un punto qualunque $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ vogliamo mostrare che $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(\pm 1, \pm 4) = 1-\pi$. Supponiamo che sia $\bar{x} \geq 0$, l'altro caso si risolve in maniera analoga. Fissato $\bar{x}$ consideriamo la funzione $\varphi(y) = f(\bar{x}, y)$. Chiaramente si ha $\varphi'(y) = f_y(\bar{x}, y)$ e quindi $\varphi(y)$ ha un minimo assoluto nel punto $y = h(\bar{x})$. Dunque $\varphi(y) \geq \varphi(\bar{x})$ ovvero $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, h(\bar{x}))$. Consideriamo ora la funzione $\psi(x) = f(x, h(x))$. Per la regola di derivazione della funzione composta si ha $\psi'(x) = f_x(x, h(x)) + h'(x) f_y(x, h(x))$ ma essendo $f_y(x, h(x)) = 0$ si ha $\psi'(x) = f_x(x, h(x))$. Nel punto precedente abbiamo mostrato che la curva $y = 2x^3 + 2x^5$ sta sopra alla curva $h(x)$ quando $x > 1$. Dunque per $x > 1$ si ha $\psi'(x) > 0$ e per $0 \leq x < 1$ si ha $\psi'(x) < 0$. Questo significa che la funzione $\psi(x)$ ha un minimo assoluto nel punto $x = 1$ cioè $\psi(x) \geq \psi(1)$ per ogni $x > 0$. Questo significa che $f(\bar{x}, h(\bar{x})) \geq f(1,4)$ che insieme alla relazione $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, h(\bar{x}))$ ci porta a concludere che $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(1,4)$.

Secondo metodo. Si può arrivare alla stessa conclusione mostrando che la funzione è *coerciva* ovvero che

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} f(x,y) = +\infty.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\geq f(x,y) - (y/4 - 4\arctan x)^2 \\
&= x^4 + \frac{\pi - 1}{16} y^2 - 16 \arctan^2 x \\
&\geq x^4 + \frac{1}{8} y^2 - 16 \frac{\pi^2}{4} \to +\infty
\end{aligned}$$

quando $x^2 + y^2 \to +\infty$. Dunque esiste un disco chiuso e limitato D tale che fuori da questo disco la funzione f è positiva. Su D la funzione, essendo continua, ammette un minimo assoluto. Tale minimo non può essere sul bordo del disco in quanto sul bordo si ha $f \geq 0$. Dunque il minimo assoluto sta all'interno del disco e deve quindi essere un punto critico di f. Dunque il minimo assoluto della funzione sul disco è $1 - \pi < 0$ e visto che fuori dal disco la funzione è positiva tale valore è il minimo assoluto della funzione su tutto $\mathbb{R}^2$.

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 5(3x)^6 + 4|y|^3 - 16x^5y^2;$$

   (a) trovare tutti i punti critici di f e calcolare il determinante Hessiano di f in tali punti;

   (b) trovare i valori massimo assoluto e minimo assoluto, assunti da f sul quadrato $D = [-1,1] \times [-1,1]$;

   (c) dire se il punto $(0,0)$ è massimo o minimo relativo.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che f è derivabile due volte, infatti si ha $D|y|^3 = 3y|y|$ e $Dy|y| = |y|$.

Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 10 \cdot 3^7 x^5 - 80x^4y^2 = 10x^4(3^7 x - 8y^2) \\
f_y(x,y) &= 12y|y| - 32x^5 y = 4y(3|y| - 8x^5).
\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema $f_x = 0$, $f_y = 0$ si vede che una soluzione è $x = 0$, $y = 0$; le altre soluzioni si trovano risolvendo

$$\begin{cases} y^2 = \frac{3^7}{8} x \\ |y| = \frac{8}{3} x^5 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\frac{3^7}{8} x = \frac{2^6}{9} x^{10}$$

ovvero, avendo già preso in considerazione la soluzione $x = 0$, si trovano due soluzioni $(\bar{x}, \pm\bar{y})$ dove

$$\bar{x} = \frac{3}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{3^4}{4}.$$

Calcoliamo la matrice Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cdot 5^2\cdot 3^7 x^4 - 5\cdot 2^6 x^3 y^2 & -160x^4 y \\ \\ -160x^4 y & 24|y| - 32x^5 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente nel punto $(0,0)$ il determinante è nullo. Negli altri due punti critici troviamo,

$$D^2 f(\bar{x}, \pm\bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{5\cdot 3^{11}}{8} & \mp\frac{5\cdot 3^8}{2} \\ \\ \mp\frac{5\cdot 3^8}{2} & 3^5 \end{pmatrix}, \qquad \det D^2 f(\bar{x}, \pm\bar{y}) = -\frac{5\cdot 3^{18}}{8}.$$

Dunque questi punti critici sono due punti di sella.

Veniamo ora al punto (b). Essendo f una funzione continua, essa ammette massimo e minimo sul quadrato D. Gli eventuali punti di massimo o minimo interni al quadrato dovranno essere punti critici di f. I punti critici $(\bar{x}, \pm\bar{y})$ trovano all'esterno del quadrato D mentre $(0,0) \in D$ è un possibile candidato e si ha $f(0,0) = 0$. Studiamo ora la funzione f sui quattro lati del quadrato. Sui lati verticali la funzione $y \mapsto f(\pm 1, y)$ ha derivata $f_y(\pm 1, y) = 4y(3|y| \mp 8)$. Questa derivata si annulla solo nel punto $y = 0$ essendo le altre due soluzioni al di fuori del intervallo $[-1, 1]$ preso in considerazione. Si ha $f(\pm 1, 0) = 5\cdot 3^6$. Sui lati orizzontali la funzione $x \mapsto f(x, \pm 1)$ ha derivata pari a $f_x(x, \pm 1) = 10x^4(3^7 x - 8)$. Tale derivata si annulla quando $x = 0$ oppure quando $x = 8/3^7$. Nei punti $(0, \pm 1)$ si ottiene il valore $f = 4$ mentre

$$f(8/3^7, \pm 1) = 5\left(3\frac{8}{3^7}\right)^6 + 4 - 2^4\left(\frac{8}{3^7}\right)^5 = 4 + \frac{5\cdot 2^{18}}{36} - \frac{2^{19}}{3^{35}} = 4 - \frac{2^{18}}{3^{36}}.$$

Dobbiamo inoltre prendere in considerazione i quattro vertici del quadrato nei quali si ha $f(1, \pm 1) = 5\cdot 3^6 + 4 - 16 = 5\cdot 3^6 - 12$, $f(-1, \pm 1) = 5\cdot 3^6 + 4 + 16 = 5\cdot 3^6 + 20$.

Tra tutti i valori considerati il minimo assoluto è 0 (assunto nel punto $(0,0)$) mentre il massimo assoluto è $5\cdot 3^6 + 20$ (assunto nei punti $(-1, \pm 1)$).

Questo ci permette anche di concludere, che $(0,0)$ è un minimo relativo in quanto è un minimo assoluto nel quadrato D che è un suo intorno.

Soluzione alternativa al punto (c). Dallo studio del segno di f_y si vede che se $x \le 0$ allora il segno di $f_y(x,y)$ è uguale al segno di y mentre se $x \ge 0$ si ha $f_y > 0$ se $y > \frac{8}{3}x^5$ oppure se $-\frac{8}{3}x^5 < y < 0$. Si veda la figura.

Prendiamo un punto generico (x_0, y_0). Se $x_0 \le 0$ la funzione $y \mapsto f(x_0, y)$ ha un punto di minimo assoluto per $y = 0$ e quindi $f(x_0, y_0) \ge f(x_0, 0)$. D'altra parte, la funzione $x \mapsto f(x, 0)$ ha minimo assoluto per $x = 0$ e quindi $f(x_0, 0) \ge f(0,0)$ da cui si conclude $f(x_0, y_0) \ge f(0,0)$.

Supponiamo ora che $x_0 \ge 0$. Posto per $x > 0$

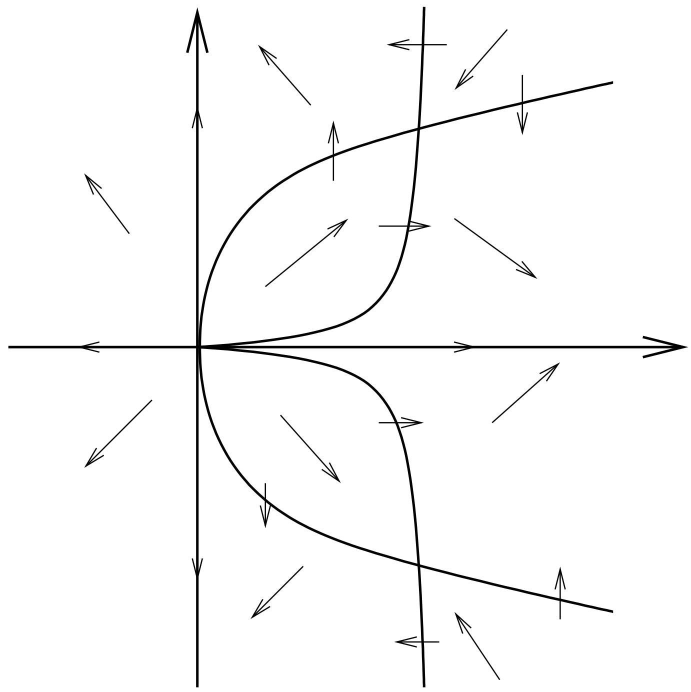
$$g(x) = \frac{8}{3}x^5$$

abbiamo che la funzione $f(\bar{x}, y)$ ha un minimo assoluto per $y = g(\bar{x})$ da cui si trova che $f(x_0, y_0) \ge f(x_0, g(x_0))$. Ma, se consideriamo la funzione $\psi(x) = f(x, g(x))$, si trova che $\psi'(x) = f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) g'(x) = f_x(x, g(x))$ in quanto $f_y(x, g(x)) = 0$. Essendo $f_x(x, g(x)) > 0$ per $x < \bar{x}$ si trova che se $x_0 \le \bar{x}$ allora $f(x_0, g(x_0)) \ge f(0,0)$. Dunque se $x_0 \le \bar{x}$ si ha $f(x_0, y_0) \ge f(0,0)$.

Abbiamo dunque concluso che per ogni punto (x_0, y_0) con $x_0 \le \bar{x}$ si ha $f(x_0, y_0) \ge f(0,0)$ e cioè $(0,0)$ è un punto di minimo relativo di f.

3. Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 1 = y'(x) + x^2 e^{-x}.$$



Soluzione. Riscriviamo l'equazione nella forma canonica:

$$y'' - y' = x^2 e^{-x} - 1.$$

Il polinomio associato è $\lambda^2 - \lambda$ che ha le due radici $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x} + dx$$

Si ha

$$\bar{y}'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x} + d$$
$$\bar{y}''(x) = [ax^2 + (b - 4a)x + c - 2b + 2a]e^{-x}$$

da cui, perché $\bar{y}$ sia una soluzione, si deve avere

$$x^2 e^{-x} - 1 = \bar{y}''(x) - \bar{y}'(x) = [2ax^2 + (2b - 6a)x + 2c - 3b + 2a]e^x - d$$

da cui si trova

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2c - 3b + 2a = 0 \\ -d = -1 \end{cases}$$

ovvero $a = 1/2$, $b = 3/2$, $c = 7/4$ e $d = 1$ da cui si conclude $\bar{y}(x) = (x^2/2 + 3x/2 + 7/4)e^x + x$. La soluzione generale dell'equazione non omogenea è dunque

$$y(x) = (x^2/2 + 3x/2 + 7/4)e^{-x} + x + c_1 e^x + c_2.$$