Analisi Matematica I modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

21 dicembre 2006

1. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da `*****A**`

$$g(x) = \begin{cases} (1-x)\sin\frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e si ponga $f(x) = g(\cos x)$. Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soluzione. Osserviamo che si ha

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} (1-x)\sin\frac{1}{x-1} = 0 = g(1)$$

in quanto la funzione sin è limitata e $1-x \to 0$ per $x \to 1$. Dunque la funzione g è continua e f è composizione di funzioni continue e di conseguenza è essa stessa continua.

Chiaramente g è derivabile per $x \neq 1$. Di conseguenza f è derivabile nei punti in cui si ha $\cos x \neq 1$ cioè per $x \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se $\cos x = 1$ dobbiamo fare il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h} &= \frac{(1-\cos(2k\pi+h))\sin\frac{1}{\cos(2k\pi+h)-1}}{h} \\ &= \frac{1-\cos h}{h}\sin\frac{1}{\cos h - 1}.\end{aligned}$$

Ricordando che $(1-\cos h)/h \to 0$ per $h \to 0$ (è l'opposto del rapporto incrementale della funzione cos) e osservando che la funzione sin è limitata, si ottiene che il limite precedente è nullo. Dunque la funzione f è derivabile anche nei punti $x = 2k\pi$. `*****B**`

Il compito `B` si risolve in maniera analoga. Nel compito `C` la funzione g è comunque continua e dunque anche la funzione f è continua (analogamente a prima). Il limite del rapporto incrementale di f nei punti in cui $1 - \sin x = 1$ ovvero per $x = k\pi$ è invece: `*****C**`

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(k\pi + h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(k\pi + h)\cos\frac{-1}{\sin(k\pi+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\pm\sin h}{h}\cos\frac{1}{\sin h}.\end{aligned}$$

Osserviamo che $(\sin h)/h \to 1$ per $h \to 0$ mentre il limite di $\cos(1/\sin h)$ non esiste per $h \to 0$. Di conseguenza il limite in questione non esiste e la funzione f, dunque, non è derivabile nei punti $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. `*****D**`

Il compito `D` si risolveva in maniera analoga.

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da ******A*

$$f(x) = \arcsin(\sin(\sqrt[3]{x})).$$

(a) Studiare la continuità della funzione f.

(b) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Soluzione. Osserviamo che la funzion f è effettivamente ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto l'argomento della funzione arcsin è sempre compreso in $[-1, 1]$. Visto che f è composizione di funzioni continue, f è a sua volta continua.

Vogliamo poi dimostrare che il limite richiesto non esiste. Per fare questo consideriamo le due successioni:

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^3, \qquad y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^3.$$

Chiaramente si ha $x_n \to +\infty$ e $y_n \to +\infty$. Inoltre si ha $f(x_n) = \pi/2$, $f(y_n) = -\pi/2$ e di conseguenza si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

dunque il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ non può esistere. ******B*

Il compito `B` si risolve in maniera analoga. ******C*

Nel compito `C` la funzione in questione è $f(x) = [\arctan(\sqrt[3]{x})]$. Osserviamo che la funzione $[y]$ presenta delle discontinuità quando y attraversa un valore intero. Visto che $\arctan \sqrt[3]{x}$ è una funzione strettamente crescente che assume i valori compresi tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$, la funzione f assumerà i valori $-2, -1, 0, 1$ e avrà delle discontinuità nei punti $-\tan^3 1$, 0 e $+\tan^3 1$. In particolare per ogni $x \geq \tan^3 1$ la funzione f assume costantemente il valore 1, e dunque si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

******D*

Il compito `D` si risolve in maniera analoga.

3. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da *******A

$$f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - 1$$

(a) Dimostrare che f è invertibile (iniettiva e surgettiva).

(b) Determinare i punti in cui f^{-1} è derivabile.

(c) Calcolare $(f^{-1})'(-4)$.

Soluzione. Osserviamo che si ha $f'(x) = 7x^8 + 5x^4 + 3x^2$ che essendo una somma di potenze pari risulta essere una funzione sempre maggiore o uguale a zero: $f' \geq 0$. Inoltre si ha $f(x) = 0$ solo per $x = 0$. Dunque la funzione f è strettamente crescente (in quanto la derivata è non negativa e si annulla in un solo punto) e di conseguenza f è iniettiva. Per quanto riguarda la suriettività basta osservare che si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ed essendo f continua, essa assume tutti i valori reali. Dunque f è invertibile. Visto che f è derivabile, la funzione inversa risulta essere derivabile in corrispondenza di tutti i punti tranne l'immagine dei punti in cui f ha derivata nulla. Abbiamo già osservato che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e dunque f^{-1} è derivabile dappertutto tranne che in $f(0) = -1$.

Per calcolare la derivata di f^{-1} in -4 bisogna trovare il punto x tale che $f(x) = -4$. Si nota facilmente che si ha $f(-1) = -4$ e dunque si ha

$$(f^{-1})'(-4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-4))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{7+5+3} = \frac{1}{15}.$$

I compiti `B`, `C` e `D` si risolvono in maniera analoga.

`*******B`

`*******C`

`*******D`