

Università degli Studi di Firenze  
Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica  
Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini  
SECONDA PROVA INTERCORSO (21 Dicembre 2015)

1. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$3x^2 + 3 \cos^2 x - x^4 \leq 3,$$

e che la stima è ottimale.

2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{\sqrt{1 + \cos(\pi x)}}.$$

3. Disegnare i grafici  $G_f$  e  $G_g$  delle funzioni  $f(x) = x\sqrt{|x-2|}$  e  $g(x) = \max\{0, 3x-6\}$ , e calcolare l'area della figura piana delimitata da quelli (i grafici) delle restrizioni di  $f$  e  $g$  all'intervallo  $[0, 3]$ .
4. Data  $f(t) = \frac{\log(1+t)}{\sqrt{t}}$ , si consideri la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt. \tag{1}$$

Si chiede di

- (a) stabilire in che senso va inteso l'integrale in (1), precisando il dominio e la regolarità della funzione  $F$ ;
- (b) determinare eventuali asintoti della funzione  $F(x)$ , per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- (c) stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right).$$