Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

PRIMA PROVA INTERCORSO **(15 gennaio 2015)**

1. Data la successione definita ricorsivamente

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n - \cos(a_n) \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

si chiede di:

1a) determinare il limite della successione a_n;

1b) posto $b_n = a_n + \frac{\pi}{2}$, provare che

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n b_n = 0.$$

Soluzione. La successione verifica la relazione $a_{n+1} = f(a_n)$ se poniamo $f(x) = x - \cos x$. Osserviamo che $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione f è crescente. I punti fissi di f sono i punti che risolvono l'equazione

$$x = x - \cos x$$

cioé $\cos x = 0$ ovvero $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Prendiamo in considerazione l'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$. L'intervallo è invariante in quanto, gli estremi vengono lasciati fissi da f e, per la stretta monotonia di f (la derivata non si annulla mai in I), i punti intermedi vanno in punti intermedi.

Per i noti risultati sulle successioni ricorsive, essendo f strettamente crescente e I invariante, sappiamo quindi che la successione a_n non esce da I, ed è monotona. Osservando[1] che $a_1 = 0$, $a_2 = -1 < a_1$ concludiamo che a_n è una successione strettamente decrescente ed essendo limitata (in I) è convergente. Visto che f è continua il limite ℓ della successione è un punto fisso di f, è un punto di $\bar{I}$ ed è inferiore al primo termine della successione. Dunque risulta $\ell = -\frac{\pi}{2}$.

[1] In alternativa: osservando che su I si ha $f(x) \leq x$ si ottiene immediatamente che a_n è decrescente.

Posto $b_n = a_n + \frac{\pi}{2}$, essendo $a_n > -\frac{\pi}{2}$, $a_n \to -\frac{\pi}{2}$ risulta che $b_n > 0$ e $b_n \to 0$. Si avrà inoltre

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + \frac{\pi}{2} = a_n - \cos(a_n) + \frac{\pi}{2} \\ &= b_n - \cos(b_n - \pi/2) = b_n - \sin(b_n). \end{aligned}$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla successione $2^n b_n$. Per $n \to \infty$ si ha (ricordando che $b_n > 0$ e $b_n \to 0$)

$$\frac{2^{n+1}b_{n+1}}{2^n b_n} = \frac{2(b_n - \sin(b_n)}{b_n} = 2\left(1 - \frac{\sin b_n}{b_n}\right) \to 2 \cdot (1-1) = 0.$$

Dunque la successione $2^n b_n$ tende a zero.

2. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$2x^4 + x = 4x^3.$$

Quante soluzioni stanno nell'intervallo $[-1, 1]$?

Soluzione. L'equazione è equivalente a

$$x(2x^3 - 4x^2 + 1) = 0$$

che ha chiaramente la soluzione $x_1 = 0$ a cui vanno aggiunti gli zeri della funzione

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1.$$

Si ha

$$f'(x) = 6x^2 - 8x = 2x(3x - 4)$$

Dunque la funzione f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$, strettamente decrescente in $[0, 4/3]$ e strettamente crescente in $[4/3, +\infty)$. Osserviamo che $f(0) = 1$ e $f(4/3) = 1 - (4/3)^3 < 0$ mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre (per rispondere alla seconda domanda) sarà utile osservare che $f(-1) = -5$ e $f(1) = -1$. Essendo f una funzione continua, all'interno di ogni intervallo in cui la funzione è strettamente monotona (quindi iniettiva) e in cui i limiti agli estremi hanno segno opposto, si trova esattamente uno zero. Dunque l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni di cui una in $(-1, 0)$ una in $(0, 4/3)$ e una in $(-1, +\infty)$.

L'equazione iniziale ha quindi quattro soluzioni, di cui tre stanno nell'intervallo $[-1, 1]$.

3. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)\,dx.$$

Soluzione. Facendo la sostituzione $x=\log t$ da cui $dx=dt/t$ si ottiene
$$\int e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)\,dx=\int \frac{1}{t}\operatorname{arctg} t\,\frac{1}{t}\,dt=\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt.$$
Integrando per parti
$$\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt=\frac{-1}{t}\operatorname{arctg} t-\int \frac{-1}{t}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt=-\frac{\operatorname{arctg} t}{t}+\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt.$$
Imponendo l'uguaglianza
$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B+Ct}{1+t^2}$$
si ottiene
$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}.$$
Dunque
$$\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt=\log t-\frac{1}{2}\log(1+t^2)=\log\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$
In conclusione
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)\,dx&=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt\\&=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\operatorname{arctg} t}{t}+\log\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_1^b\\&=\frac{\pi}{4}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\log 2}{2}.\end{aligned}$$

4. Ricordando che per ogni $x>0$ si ha
$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$
verificare che per ogni naturale $n\ge 1$ si ha
$$\sin(2n\operatorname{arctg}(n^2))=(-1)^{n+1}c_n\,,$$

con $c_n > 0$ e $c_n \to 0$. Determinare quindi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n \operatorname{arctg}(n^2)).$$

Soluzione. Come suggerito si ha

$$\operatorname{arctg}(n^2) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\sin(2n \operatorname{arctg}(n^2)) &= \sin(2n(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2})) = \sin(n\pi - 2n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}) \\
&= -\cos(n\pi) \sin(2n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}) \\
&= -(-1)^n \sin(2n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}) = (-1)^{n+1} c_n
\end{aligned}$$

se poniamo $c_n = \sin(2n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2})$. Chiaramente $c_n \to 0$ in quanto $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi l'argomento del seno tende a zero. Dobbiamo dimostrare che $c_n > 0$. Sappiamo che per ogni $x > 0$ si ha $\operatorname{arctg} x \geq x$ (la funzione è concava per $x \geq 0$ quindi sta "sotto" la retta tangente in $x = 0$). Dunque se $n \in \mathbb{N}$ (si intende $n \geq 1$)

$$0 < 2n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \leq 2 < \pi$$

e di conseguenza $c_n > 0$ in quanto nell'intervallo $(0, \pi)$ la funzione seno è positiva.

Sapendo ora che siamo di fronte ad una serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n \operatorname{arctg}(n^2)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$$

con $c_n > 0$ e $c_n \to 0$ per applicare il teorema di Leibniz (di convergenza per le serie a segni alterni) ci manca solo verificare che c_n sia decrescente. Per fare ciò consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin \frac{2 \operatorname{arctg}(x^2)}{x}$$

per la quale si ha $c_n = f(1/n)$. Se f è crescente in un intorno destro di 0 allora c_n sarà decrescente in un intorno di $+\infty$.

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\frac{2\,\mathrm{arctg}(x^2)}{x}\cdot 2\frac{\frac{2x}{1+x^4}x - \mathrm{arctg}(x^2)}{x^2} \\ &= 2\frac{\cos\frac{2\,\mathrm{arctg}(x^2)}{x}}{x^2(1+x^4)}[2x^2 - \mathrm{arctg}(x^2) - x^4\,\mathrm{arctg}(x^2)]. \end{aligned}$$

Osserviamo che l'argomento del coseno tende a zero per $x \to 0$ dunque in un intorno di 0 il coseno è certamente positivo. Il denominatore $x^2(1+x^4)$ è anch'esso sempre positivo. Rimane da considerare il fattore tra parentesi quadre. Sfruttando di nuovo la stima $\mathrm{arctg}(x^2) \leq x^2$ si ottiene

$$2x^2 - \mathrm{arctg}(x^2) - x^4\,\mathrm{arctg}(x^2) \geq 2x^2 - x^2 - x^6 = x^2(1-x^4)$$

che è una quantità positiva se $x < 1$.

Dunque abbiamo verificato che in un opportuno intorno destro del punto $x = 0$ la funzione $f(x)$ è monotona crescente. Di conseguenza a parte eventualmente un numero finito di termini la successione c_n è decrescente.

Si può quindi applicare il teorema di Leibniz per concludere che la serie converge.