Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

APPELLO N. 3 – PROVA SCRITTA **(21 Marzo 2016)**

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Dato l'insieme
$$A = \left\{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = n^3 e^{-n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$
si chiede di

   1a) determinare $\inf A$ e $\sup A$, precisando se essi coincidono rispettivamente con $\min A$ e $\max A$ (con $\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri interi *positivi*);

   1b) dimostrare che
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + a_2 + C,$$
   dove $C = \displaystyle\int_2^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx$.

2. Data
$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad x < 1,$$
provare che esiste un punto $\bar{P} = (\bar{x}, f(\bar{x}))$ sul grafico G_f di f a distanza minima dall'origine $(0,0)$. Provare inoltre che tale punto è unico e che si ha $-\frac{1}{2} < \bar{x} < -\frac{1}{4}$.

3. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log\sqrt{1+x} - \sqrt{x\log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x}.$$

4. Si consideri la funzione $F\colon I \to \mathbb{R}$ con $I = (-1, +\infty)$, definita da
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\, dt.$$
Dimostrare che F è iniettiva. Dire se l'insieme immagine $F(I)$ è un intervallo, se è aperto/chiuso, se è limitato/illimitato. Dimostrare che per ogni $x \in I$ si ha $F(x) \leq x$.

Soluzioni

1. 1a) Richiamando dal testo la definizione dell'insieme

$$A = \left\{ a_n \in \mathbb{R} \,|\, a_n = n^3 e^{-n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

si osserva subito che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e che $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, per confronto tra gli infiniti n^3 (potenza) ed e^{n^2} (esponenziale). Di conseguenza, si ha $\inf A \equiv \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$, mentre A *non* ha minimo.

D'altra parte, si ha evidentemente $a_n = f(n)$, con $f(x) = x^3 e^{-x^2}$, e dal fatto che f è una funzione derivabile per ogni x, con

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3\,(-2x)e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)\,,$$

segue che la restrizione di f alla semiretta $[1, +\infty)$ è una funzione crescente in $[1, \sqrt{3/2}]$ e decrescente in $[\sqrt{3/2}, \infty)$. In particolare, la successione a_n risulta strettamente decrescente per $n \geq 2$, e si ha $a_n \leq a_2 = 8e^{-4}$ per ogni $n \geq 2$. Calcolando $a_1 = e^{-1}$ e osservando che $a_1 = e^{-1} > 8e^{-4} = a_2$ (infatti $e^3 > 8$ dato che $e > 2$), si conclude che a_n è in effetti decrescente in senso stretto e $\max_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = 1/e$.

Riassumendo, si ha

$$\inf A = 0\,, \qquad \sup A = \max A = \frac{1}{e}\,.$$

1b) La stima richiesta per la somma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si ottiene facilmente utilizzando il fatto che $f(x)$ è decrescente per $x \geq 2$. Si ha infatti per $n \geq 3$:

$$a_n = f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

da cui

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=3}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx = C. \tag{1}$$

La stima (1) implica immediatamente la stima richiesta per $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Si osservi che è possibile calcolare esplicitamente il valore di C: infatti, integrando per parti, si perviene facilmente a

$$\int_2^c x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}(1 + x^2)e^{-x^2}\Big|_2^c \longrightarrow \frac{5}{2}e^{-4}\,, \quad c \to +\infty\,,$$

e la definizione di integrale in senso improprio fornisce $C = 5/(2e^4)$.

2. Il grafico G_f di

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,, \qquad x < 1\,,$$

è un arco di iperbole contenuto nel semipiano $y > 0$. Se $P = (x, f(x))$ è un suo punto generico e $O = (0,0)$, il quadrato della distanza di P da O è la funzione $g\colon (-\infty, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$d^2(P,O) = x^2 + [f(x)]^2 = x^2 + \frac{1}{(1-x)^2} =: g(x)\,, \qquad x < 1\,.$$

Si osserva che g è una funzione continua in $I = (-\infty, 1)$, con

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty\,;$$

di conseguenza, g ammette minimo assoluto in I (si tratta di una controparte/conseguenza del Teorema di Weierstrass), che risponde alla prima richiesta. Anche senza utilizzare il risultato citato, al fine di individuare il/i punto/i di minimo, si osserva che g è derivabile in I, con

$$g'(x) = 2x + 2f(x)f'(x) = 2\Big[x + \frac{1}{(1-x)^3}\Big]\,, \qquad x \in I\,,$$

il cui segno in I non è di facile individuazione. Osservando che g' è una funzione continua in I, con $g'(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$ e $g'(x) \to +\infty$ per $x \to 1^-$, il *Teorema degli zeri* assicura che l'equazione $g'(x) = 0$, cioè

$$x + \frac{1}{(1-x)^3} = 0\,, \tag{2}$$

ha almeno una soluzione $\bar{x}$ in I. (È importante sottolineare che uno zero di g' – ovvero un punto critico di g – non è detto sia di estremo per g.)

Si prosegue calcolando

$$g''(x) = 2\Big[1 + \frac{1}{(x-1)^4}\Big] > 0 \qquad \forall x \in I\,,$$

che implica che g è una funzione strettamente convessa in I e l'unico punto critico $\bar{x}$ è effettivamente di minimo assoluto per g (in maniera equivalente, da $g''(x) > 0$ in I segue che g' è strettamente crescente ed ha un solo zero in I). Infine, che $\bar{x}$ appartenga all'intervallo $(-1/2, -1/4)$ segue facilmente dal fatto che

$$g'(-\frac{1}{2}) = -\frac{11}{27} < 0\,, \qquad g'(-\frac{1}{4}) = \frac{131}{128} > 0\,,$$

applicando ancora una volta il *Teorema degli zeri.*

In modo equivalente e geometricamente intuitivo si poteva argomentare anche nel modo seguente: il punto $\bar{P}$ cercato su G_f è il punto in cui la congiungente O a G_f risulta perpendicolare a G_f in $\bar{P}$. Un retta del fascio di centro O di equazione $y = mx$ passa per $\bar{P}$ se $f(\bar{x}) = m\bar{x}$, cioé se $m = [\bar{x}(1-\bar{x})]^{-1}$; d'altra parte essa sarà perpendicolare a G_f se si ha anche $m = -1/m'$, ove m' è il coefficiente angolare della tangente a G_f in $\bar{P}$. Poiché $m' = f'(\bar{x}) = 1/(1-\bar{x})^2$, si ottiene anche $m = -(1-\bar{x})^2$.

Uguagliando le due espressioni di m, si conclude che $\bar{x}$ deve risolvere l'equazione

$$\frac{1}{x(1-x)} = -(1-x)^2\,,$$

con $x < 1$, che non è altro se non l'equazione (2). A questo punto si procede come sopra.

3. Osserviamo che per $x \to 0$ si ha

$$2\log\sqrt{1+x} = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x\log(1+x)} &= \sqrt{x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \sqrt{x^2\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)} \\
&= |x|\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)^{\frac{1}{2}} = |x|\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) + o(x)\right) \\
&= |x|\left(1 - \frac{x}{4} + o(x)\right) = |x| - \frac{x|x|}{4} + o(x^2)
\end{aligned}$$

e infine:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\
\sin x &= x + o(x^2).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\frac{2\log\sqrt{1+x} - \sqrt{x\log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} - |x| + \frac{x|x|}{4} + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{x^2}{2}) - x + o(x^2)} \\
&= \frac{x - |x| - \frac{x^2}{2} + \frac{x|x|}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}.
\end{aligned}$$

Per $x \to 0^+$ si ha dunque

$$\frac{2\log\sqrt{1+x} - \sqrt{x\log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x} = \frac{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \to -\frac{1}{4}$$

mentre per $x \to 0^-$ si ha

$$\frac{2\log\sqrt{1+x} - \sqrt{x\log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x} = \frac{2x + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{2 + o(1)}{x + o(x)} \to -\infty.$$

4. Sia $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$, $t \in (-1, \infty) = I$. Poiché $f \in C^0(I)$, f è continua in ogni intervallo chiuso di estremi 0 e x, $x > -1$: per il Teorema fondamentale del Calcolo integrale, la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

appartiene a $C^1(I)$, con

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,, \qquad x \in I\,.$$

Da $F'(x) > 0$ per ogni $x > -1$ segue che la F è strettamente crescente in I; di conseguenza, F risulta iniettiva. (È importante sottolineare che le due proprietà non sono equivalenti: esistono funzioni iniettive che non sono monotone, e gli esempi sono elementari.)

Dalla continuità di F nell'intervallo I segue che $F(I)$ è un intervallo; dal fatto che F è crescente nell'aperto I si deduce che $F(I)$ è l'intervallo *aperto* di estremi rispettivamente $\lim_{x\to -1^+} F(x)$, e $\lim_{x\to +\infty} F(x)$. Per stabilire se i limiti suddetti sono finiti o infiniti (i limiti esistono: perché?), si producono le due stime asintotiche

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t+t^2}} \sim \frac{C_1}{\sqrt{1+t}}\,, \qquad t \to -1^+$$

mentre

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad t \to +\infty\,,$$

che assicurano la convergenza di entrambi gli integrali

$$\int_0^{-1} f(t)\, dt = -\int_{-1}^0 f(t)\, dt\,, \qquad \int_0^\infty f(t)\, dt\,.$$

Si conclude che $F(I)$ è un intervallo limitato.

Infine, la stima $F(x) \leq x$ segue facilmente calcolando

$$F''(x) = f'(x) = -\frac{3}{2}x^2\sqrt{(1+x^3)^3}$$

e osservando che $F''(x) \leq 0$ in I. Dunque F è concava in I ed il suo grafico sta *sotto* a tutte le rette ad esso tangenti. In particolare esso sta sotto alla retta tangente per $(0,0)$, di equazione $y = x$ ($F'(0) = f(0) = 1$), ovvero $F(x) \leq x$ in I.