Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

14 luglio 2020

1. Dire per quali $a > 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^3}{(2n)!\,(an)^n}$$

Soluzione. Chiamato a_n l'addendo generico della somma possiamo studiare la convergenza assoluta utilizzando il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{((n+1)!)^3}{(2(n+1))!(a(n+1))^{n+1}} \frac{(2n)!(an)^n}{(n!)^3} \\
&= \frac{(n+1)^3(n!)^3}{(2n+2)(2n+1)(2n)!a^{n+1}(n+1)(n+1)^n} \frac{(2n)!a^n n^n}{(n!)^3} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)a(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{n+1}{4a\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.
\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$ tale rapporto tende a $\frac{1}{4ae}$. Quindi se $a > \frac{1}{4e}$ la serie converge assolutamente.

Se invece $a \le \frac{1}{4e}$ osserviamo che $n+1 > n+\frac{1}{2}$ e che notoriamente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ (in quanto tale successione è strettamente crescente) dunque il rapporto è maggiore di 1 e di conseguenza $|a_{n+1}| > |a_n|$. Ne consegue che $|a_n|$ non può essere infinitesima e quindi neanche a_n è infinitesima. Mancando una condizione necessaria possiamo affermare che in tal caso la serie non converge. $\square$

2. Si consideri la seguente funzione $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dipendente dal parametro $a > 0$:

$$f(x) = a \ln x + \int_1^x \frac{\sin t - t}{t^4}\, dt$$

   (a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

   (b) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

   (c) Per quali valori di $a > 0$ la funzione f si prolunga ad una funzione F continua e derivabile su $[0,+\infty)$?

   (d) Per tali valori di a quanto vale $F'(0)$?

Soluzione. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^4}\, dt$$

è assolutamente convergente in quanto

$$\frac{|\sin t - t|}{t^4} \sim \frac{1}{t^3}$$

e l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ converge se $\alpha > 1$.
Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a \ln x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^4}\, dt = +\infty.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo sappiamo che

$$f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{\sin x - x}{x^4}$$

e dunque, per $x \to +\infty$ il limite di $f'(x)$ è zero.
Visto che $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ possiamo scrivere

$$f(x) = \int_1^x \frac{at^3 + \sin t - t}{t^4}\, dt$$

e per $t \to 0$ osserviamo che si ha, sviluppando con Taylor:

$$g(t) = \frac{at^3 + \sin t - t}{t^4} = \frac{at^3 + t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) - t}{t^4} = \frac{\left(a - \frac{1}{6}\right) t^3 + o(t^4)}{t^4}.$$

Dunque se $a = \frac{1}{6}$ risulta $g(t) \to 0$ per $t \to 0^+$ e dunque $\lim_{x\to 0} f(x)$ coincide con un integrale convergente. Se invece $a \neq \frac{1}{6}$ risulta $g(t) \sim \frac{a-\frac{1}{6}}{t}$ il cui integrale, sull'intervallo $(0, 1]$ è divergente. Dunque solo se $a = \frac{1}{6}$ la funzione $f(x)$ si può estendere con continuità ad una funzione $F(x)$ definita su $[0, +\infty)$.
Se $a = \frac{1}{6}$ abbiamo già osservato che per $x \to 0^+$ si ha

$$f'(x) = g(x) \to 0$$

dunque per il teorema di Lagrange si ha

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi(x)) = g(\xi(x)) \to 0$$

per $x \to 0^+$ in quanto $\xi(x) \in (0, x)$ e dunque $\xi(x) \to 0$. Dunque F è derivabile e $F'(0) = 0$.

□

3. Scrivere le soluzioni, per $x > 0$, dell'equazione differenziale

$$u' + \frac{u}{x} = x^2.$$

Scrivere, se esistono, le soluzioni $u(x)$ che verificano:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x^2} = 1$$

¡answer¿ non esistono ¡/answer¿ Scrivere, se esistono, le soluzioni $u(x)$ che verificano:

$$\lim_{x\to 0^+} x\, u(x) = 1.$$

Soluzione. Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante x si ottiene l'equazione (equivalente se $x > 0$)

$$xu' + u = x^3$$

che si può scrivere nella forma

$$(xu)' = x^3$$

da cui

$$xu \in \int x^3 \, dx$$

ovvero

$$xu = \frac{x^4}{4} + c$$

e dividendo per $x > 0$:

$$u(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}.$$

Si ha dunque, qualunque sia c:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} + \frac{c}{x^3} = +\infty.$$

Non è quindi possibile trovare soluzioni per cui tale limite sia 1.

Invece

$$\lim_{x \to 0^+} x\, u(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^4}{4} + c = c$$

e dunque tale limite è 1 se $c = 1$. □