ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 5 – 2.10.2020

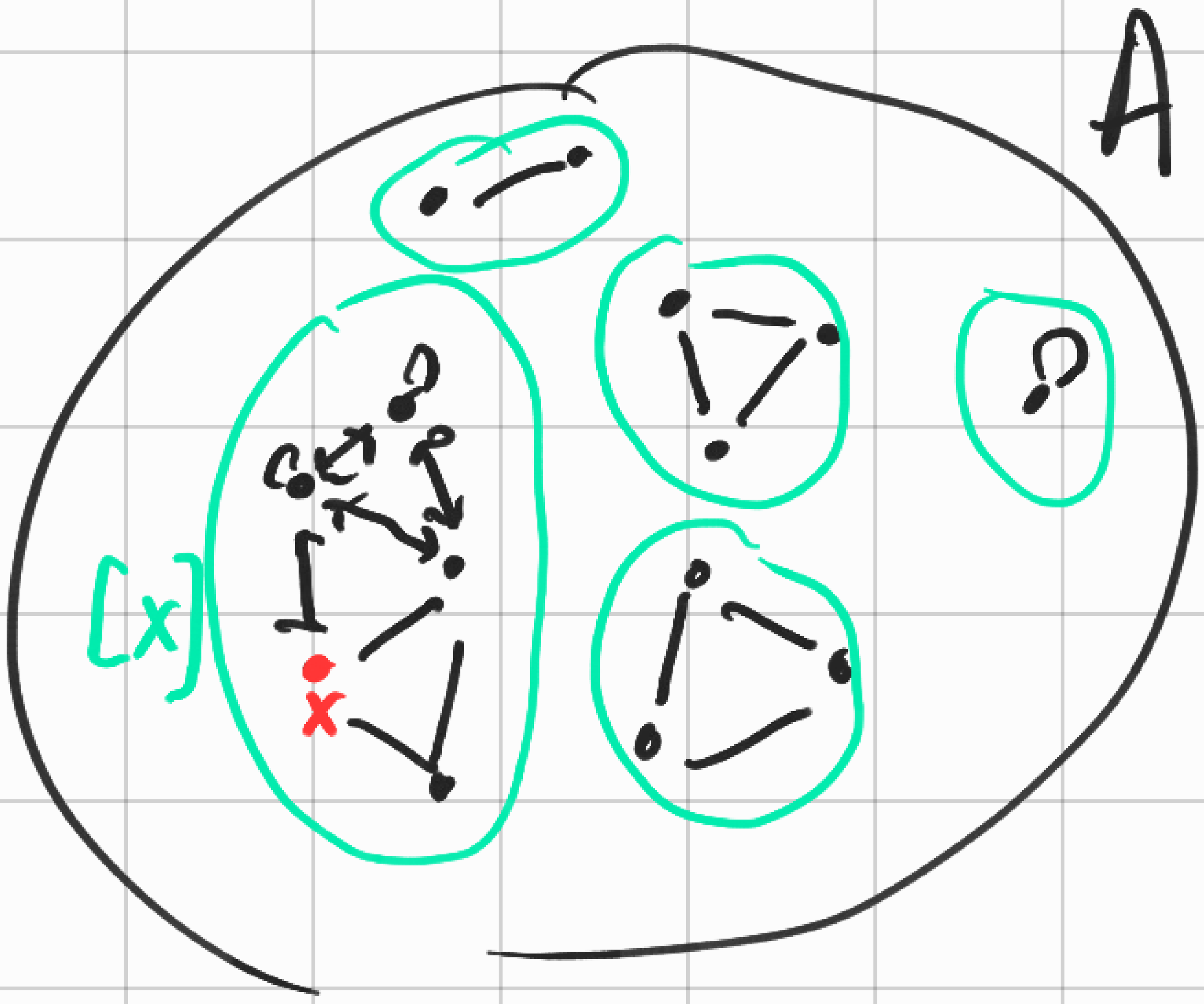
Relazione di equivalenza

R è di equivalenza $R \subseteq A \times A$

se è riflessiva xRx

simmetrica $xRy \Rightarrow yRx$

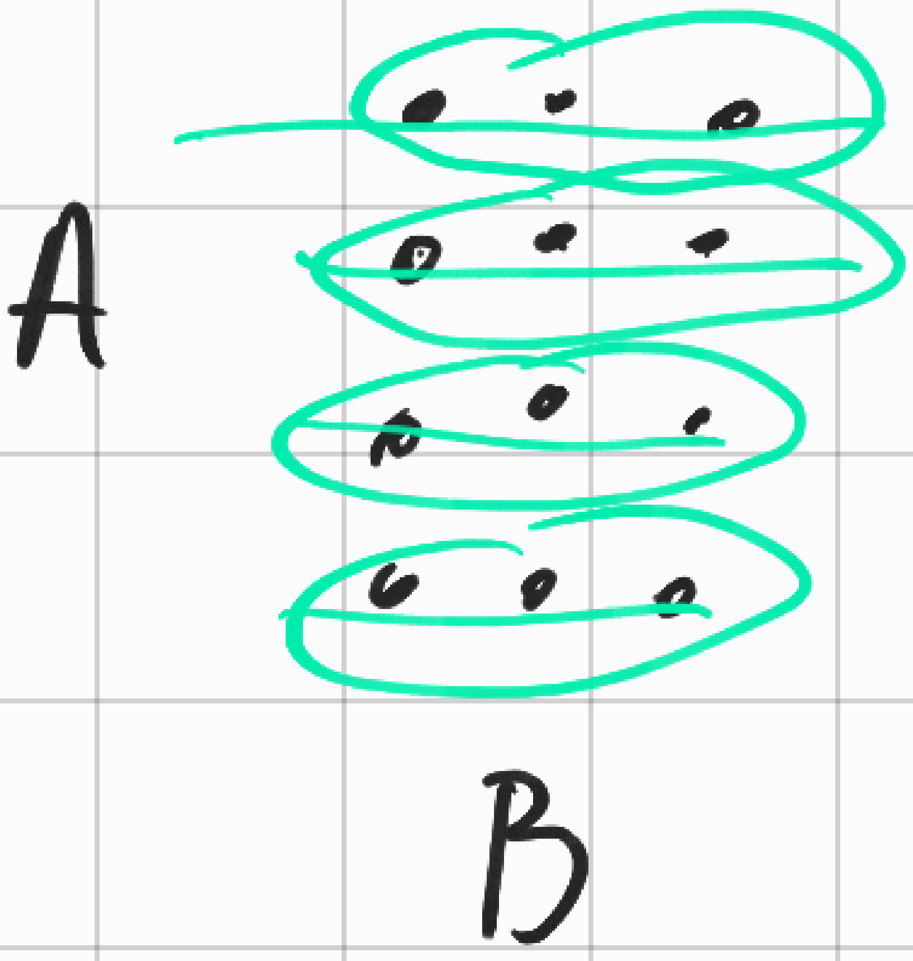
transitiva $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$



$A/R =$

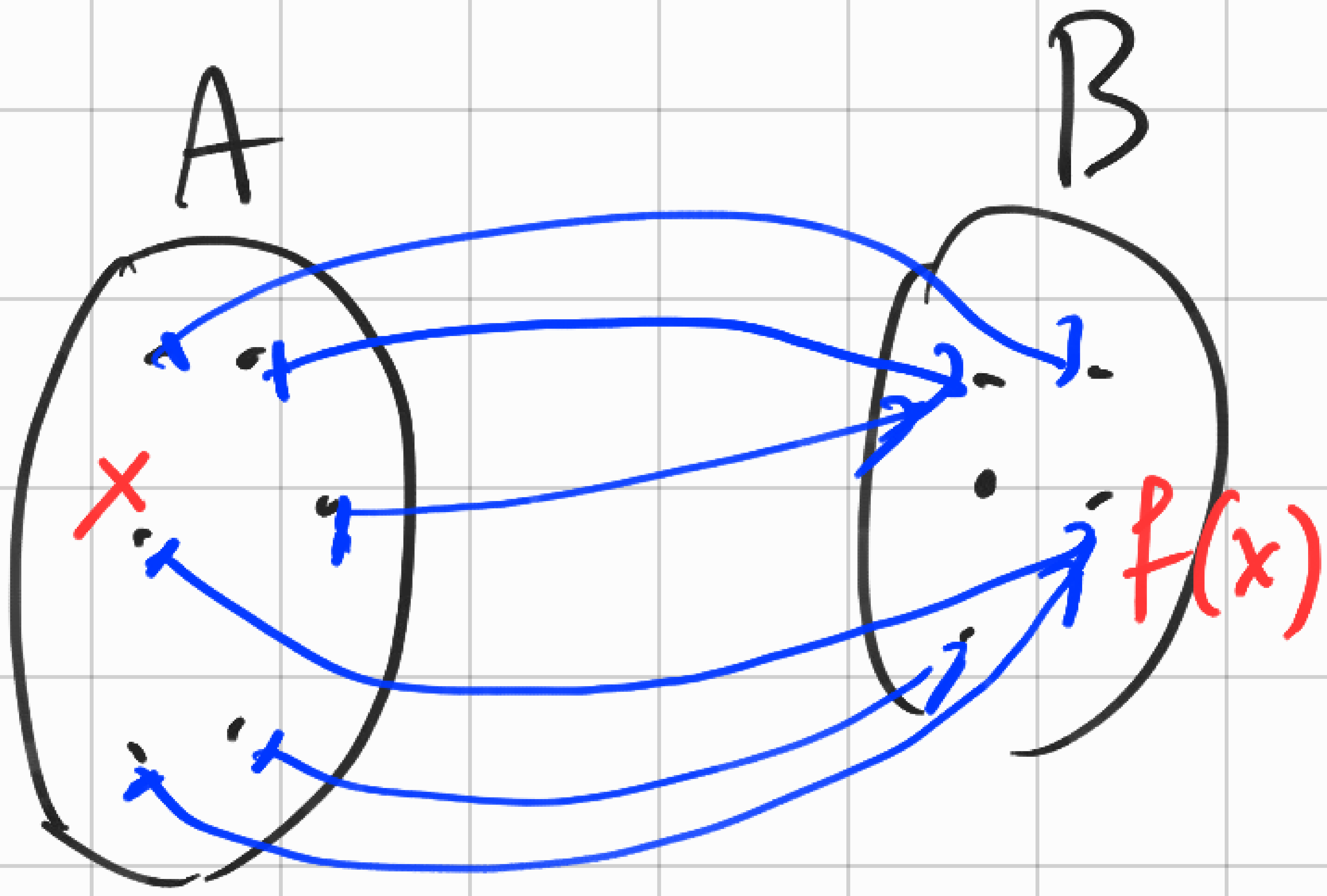
$A \times B$

$R: (a,b) \sim (c,d)$ se $b = d$



$$A \times B / R \cong A$$

FUNZIONI

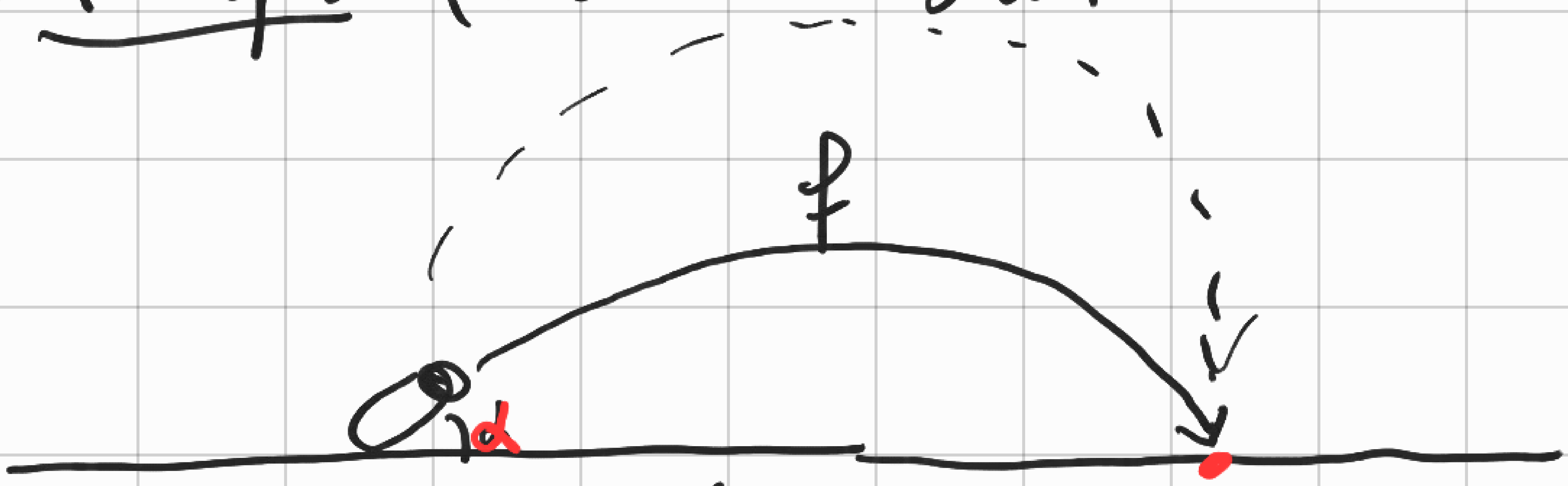


$f: A \to B$

A = dominio, B = codominio

$x \longmapsto f(x)$

Esempio (militarista)



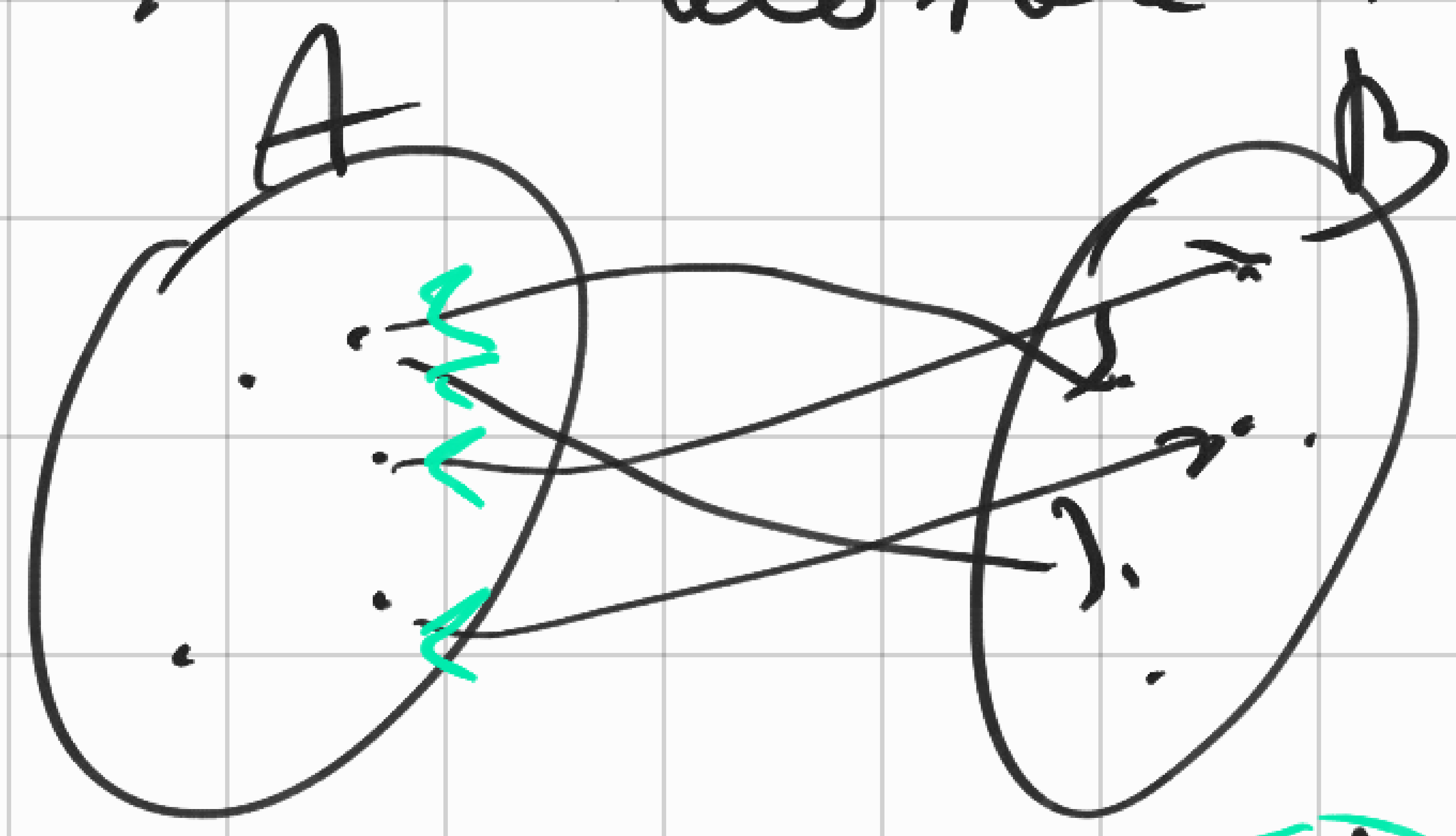
$A = \{\text{angoli}\}$ $\qquad$ $B = \{\text{obiettivi}\}$

$\alpha \longmapsto f(\alpha)$

Problema: Dato un obiettivo b trovare l'angolo α che mi permette di colpire quell'obiettivo.

Voglio invertire una funzione.

Se ho una relazione R tra A e B

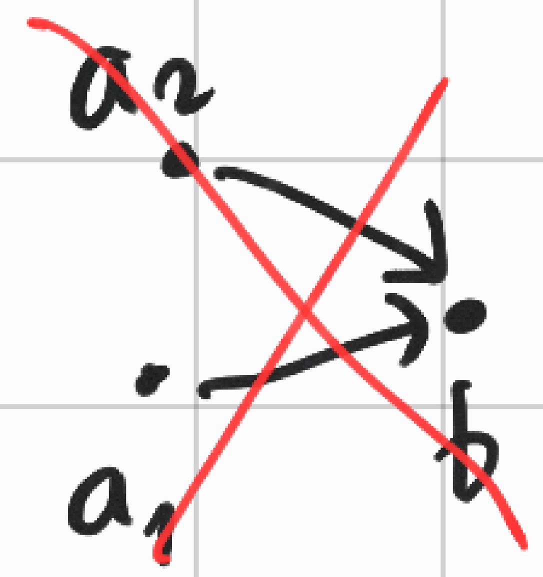


la relazione inversa R^{-1} tra B e A ottenuta da R invertendo le frecce

Se f è una funzione f^{-1} è una relazione.
Affinché f^{-1} sia una funzione
f deve avere due proprietà:

f suriettiva: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$.

f iniettiva: $\forall a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$
$$\Downarrow$$
$$a_1 = a_2$$



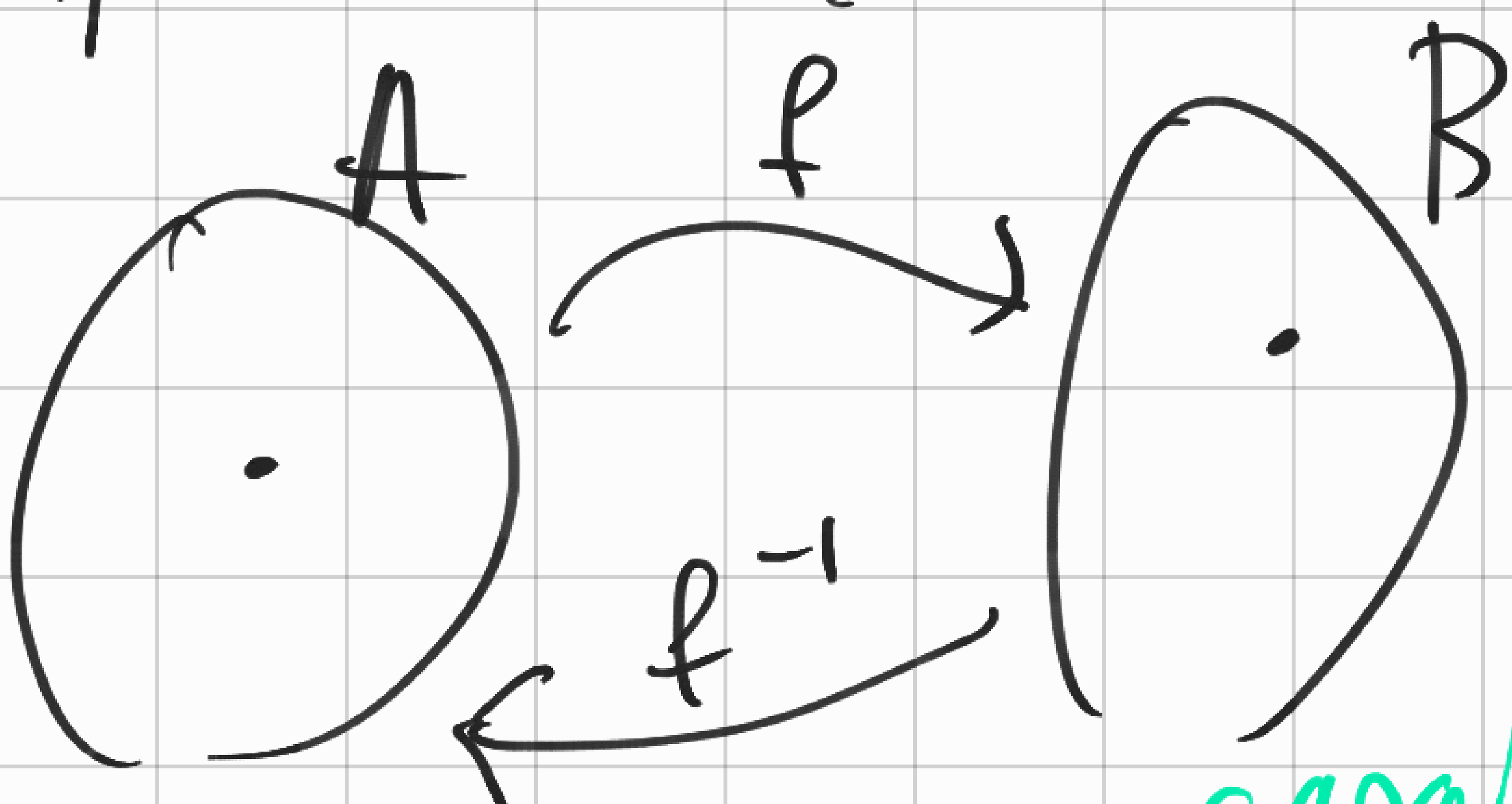
$P \Rightarrow Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Diremo che f è bigettiva (o invertibile) se è iniettiva e suriettiva.
In tal caso la relazione inversa è una funzione chiamata funzione inversa che si indica con f^{-1}.

$$f : A \to B \quad \text{bigettiva}$$

$$f^{-1} : B \to A$$



$$f^{-1}(f(x)) = x$$

caratterizza l'inversa

Inoltre f^{-1} è bigettiva $(f^{-1})^{-1} = f$.

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Es $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \underset{A}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}\setminus\{0\}}} \to \underset{B=A}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}\setminus\{0\}}}$

f è biyettiva

$f^{-1} = f$. $\qquad \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$

Altro modo di vedere <u>iniettività</u> e <u>suriettività</u>

$$f: A \to B$$

$(*)$ $f(x) = b$ è una eq.

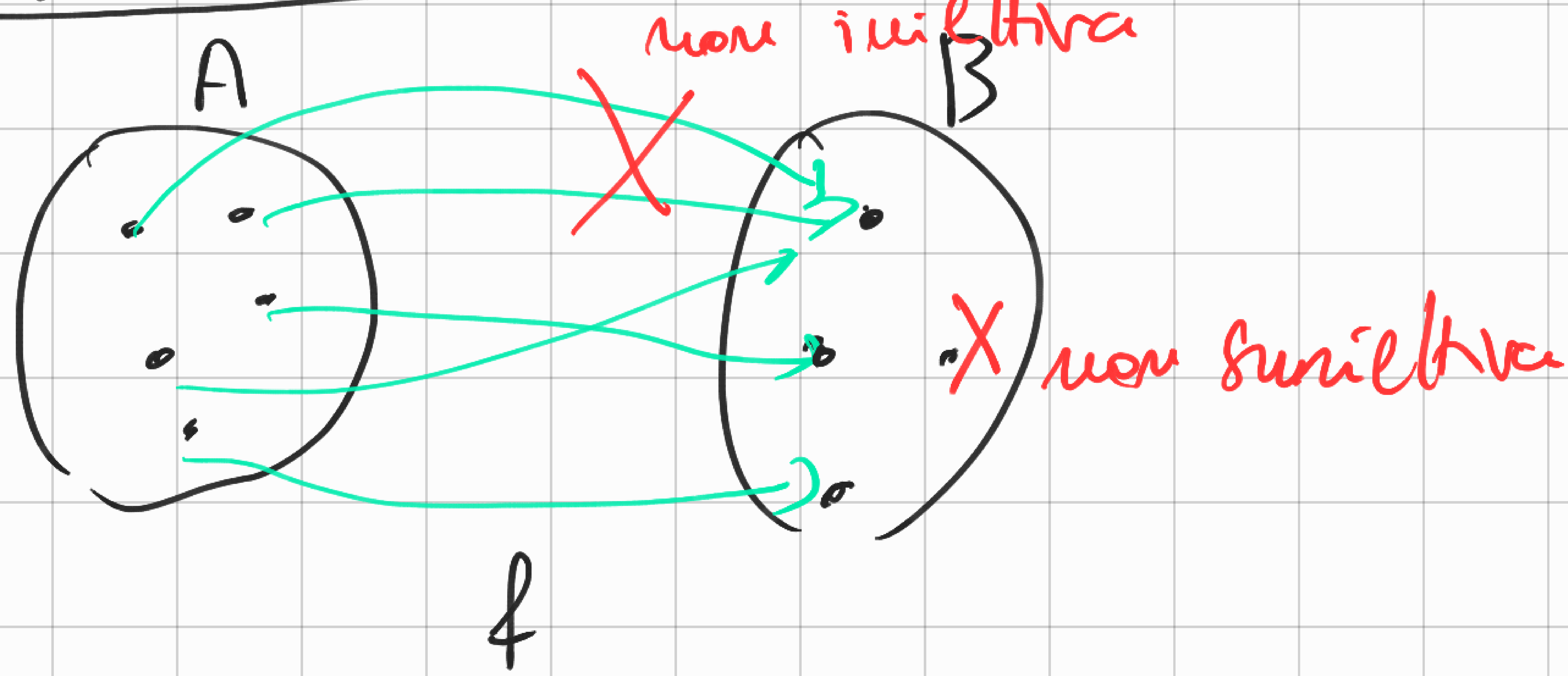
$(\exists)$ f <u>suriettiva</u>: $\forall b \in B$ l'equazione $(*)$ ha almeno una soluzione.

$(!)$ f <u>iniettiva</u>: $\forall b \in B$ l'equazione $(*)$ ha al più una soluzione.

$(\exists!)$ f <u>biyettiva</u>: $\forall b \in B$ l'eq. $(*)$ ha una unica soluzione:

$$x = f^{-1}(b).$$

Graficamente



Iniettiva: non ci sono 2 frecce che arrivano nello stesso punto

Suriettiva: in ogni punto di B arriva almeno una freccia

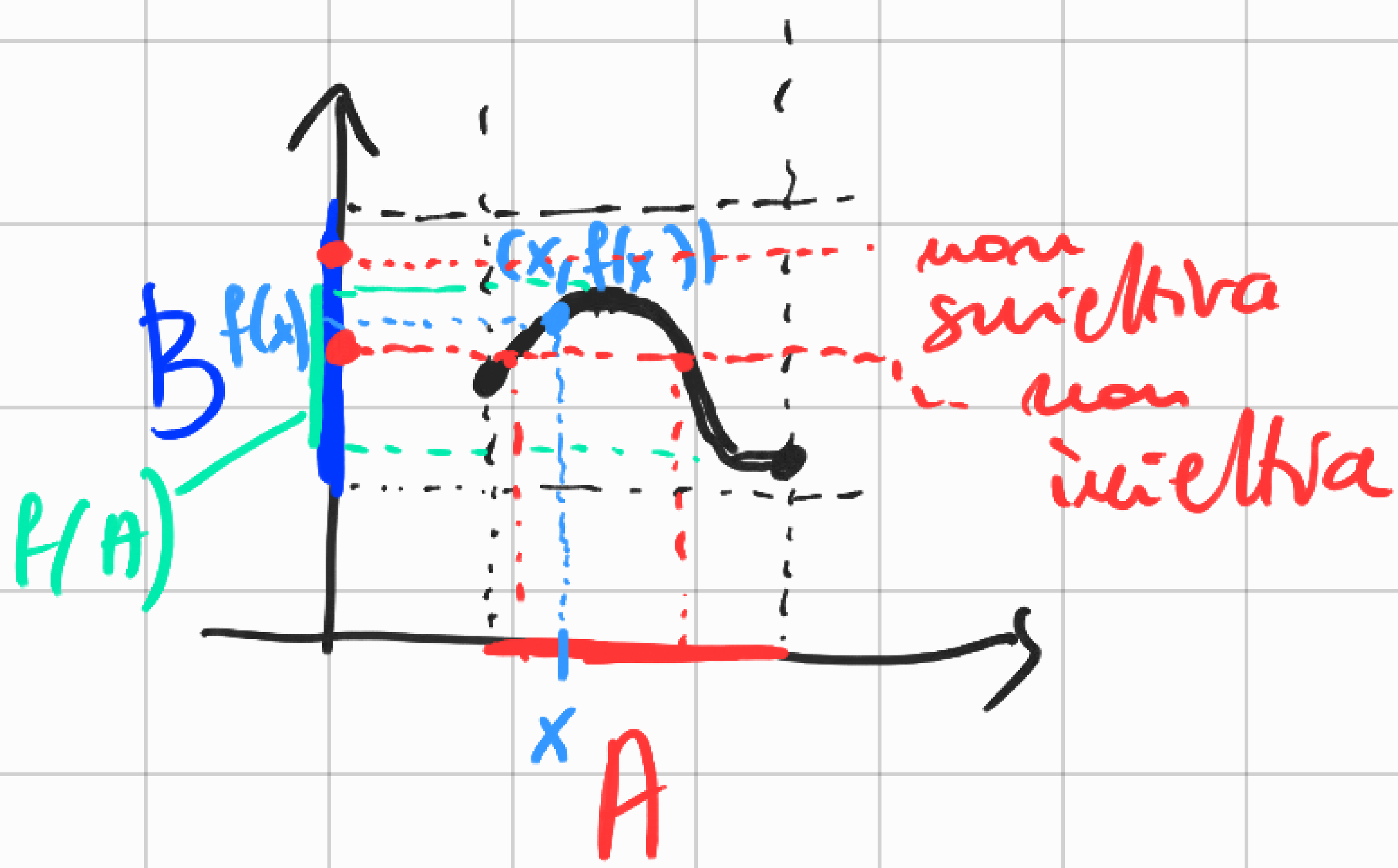
Grafico di funzione

dettaglio interno

Per noi $f : A \to B$ $\quad (f \subseteq A \times B)$

$$G_f = \{(a,b) : a \in A, \ b = f(a)\}$$

(per noi $G_f = f$).



$f : A \longrightarrow B$

Se $f : A \to B \subseteq C$

allora $f : A \to C$

Se $f : A \to B$ è suriettiva

$f : A \to C$ potrebbe non esserlo.

Def (immagine).

$f : A \to B$

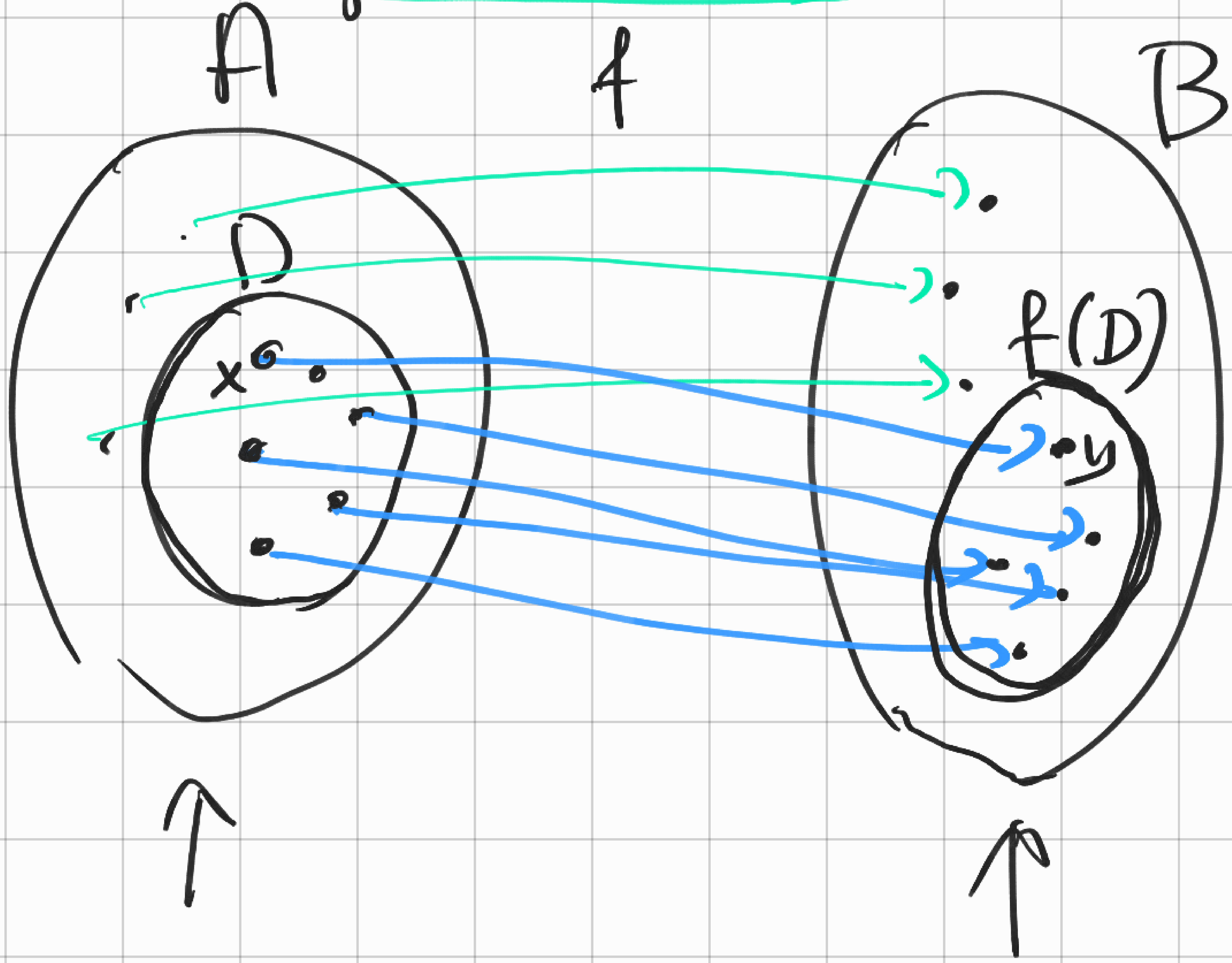
dato $D \subseteq A$ definiamo

comprensione (xRy)

$$f(D) = \{ y \in B : \underline{\exists x \in D : f(x) = y} \}$$

$$= \{ f(x) : x \in D \} \quad \text{NOTAZIONE}$$

Immagine di D tramite f



L'immagine di $f: A \to B$

$$\operatorname{Im} f = f(A).$$

f è suriettiva $\iff f(A) = B$

$$f: A \to f(A) \subseteq B$$

è sempre suriettiva se restringo il codominio all'immagine.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

NO

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

SI

f: è iniettiva ma non suriettiva

Se ho una espressione, ad esempio $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2}{x}$

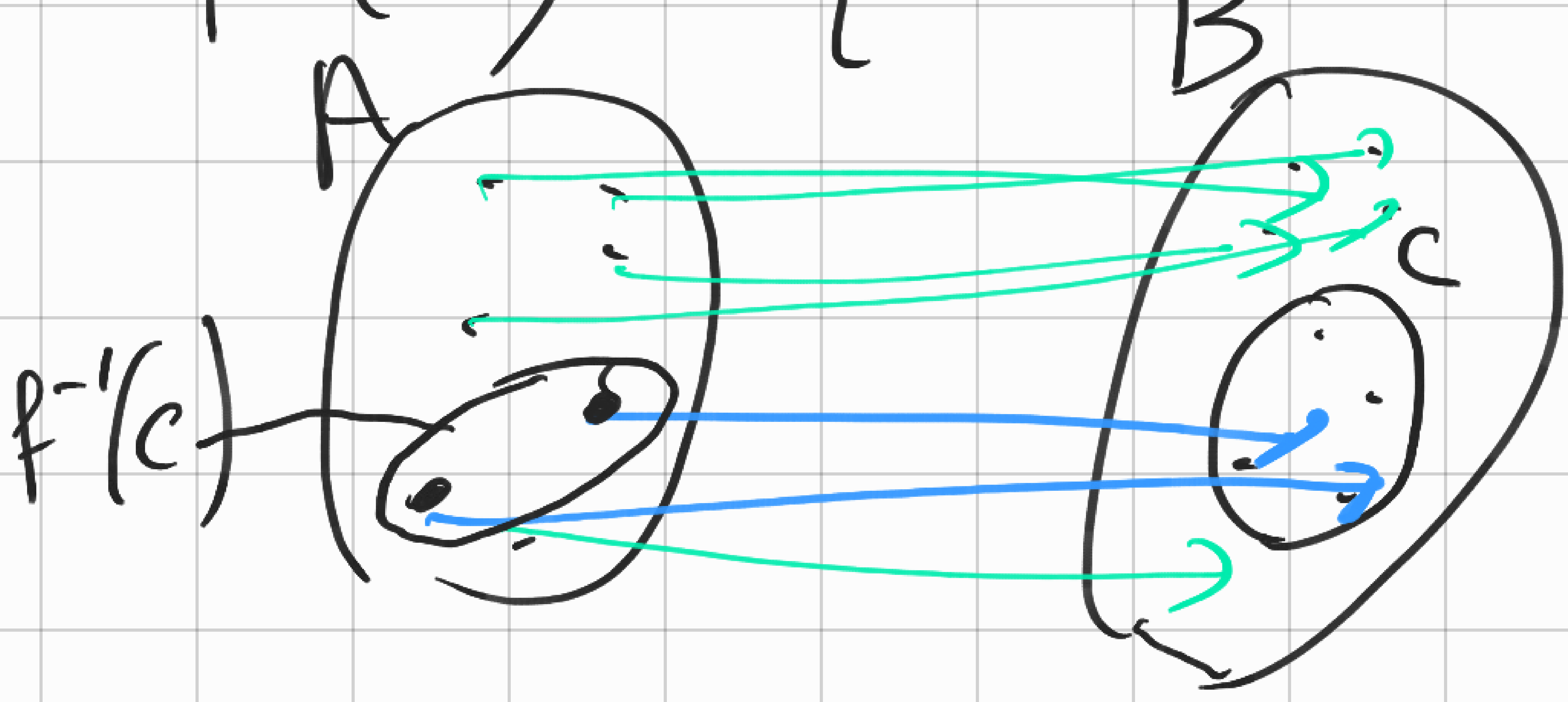
espressioni diverse che rappresentano la stessa funzione

Quando da una espressione costruisco una funzione di solito scelgo come dominio il "campo di esistenza" della espressione.

Controimmagine $f : A \to B$

Se $C \subseteq B$

$$f^{-1}(C) = \{ x \in A : f(x) \in C \}$$



Es $\quad f(x)=\dfrac{1}{x} \qquad f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$$f^{-1}(\{0\})=\emptyset$$

Esercizio

$f:A\to B$, $D\subseteq A$, $C\subseteq B$

$$f^{-1}(f(D)) \overset{?}{=} D$$

$$f(f^{-1}(C)) \overset{?}{=} C$$

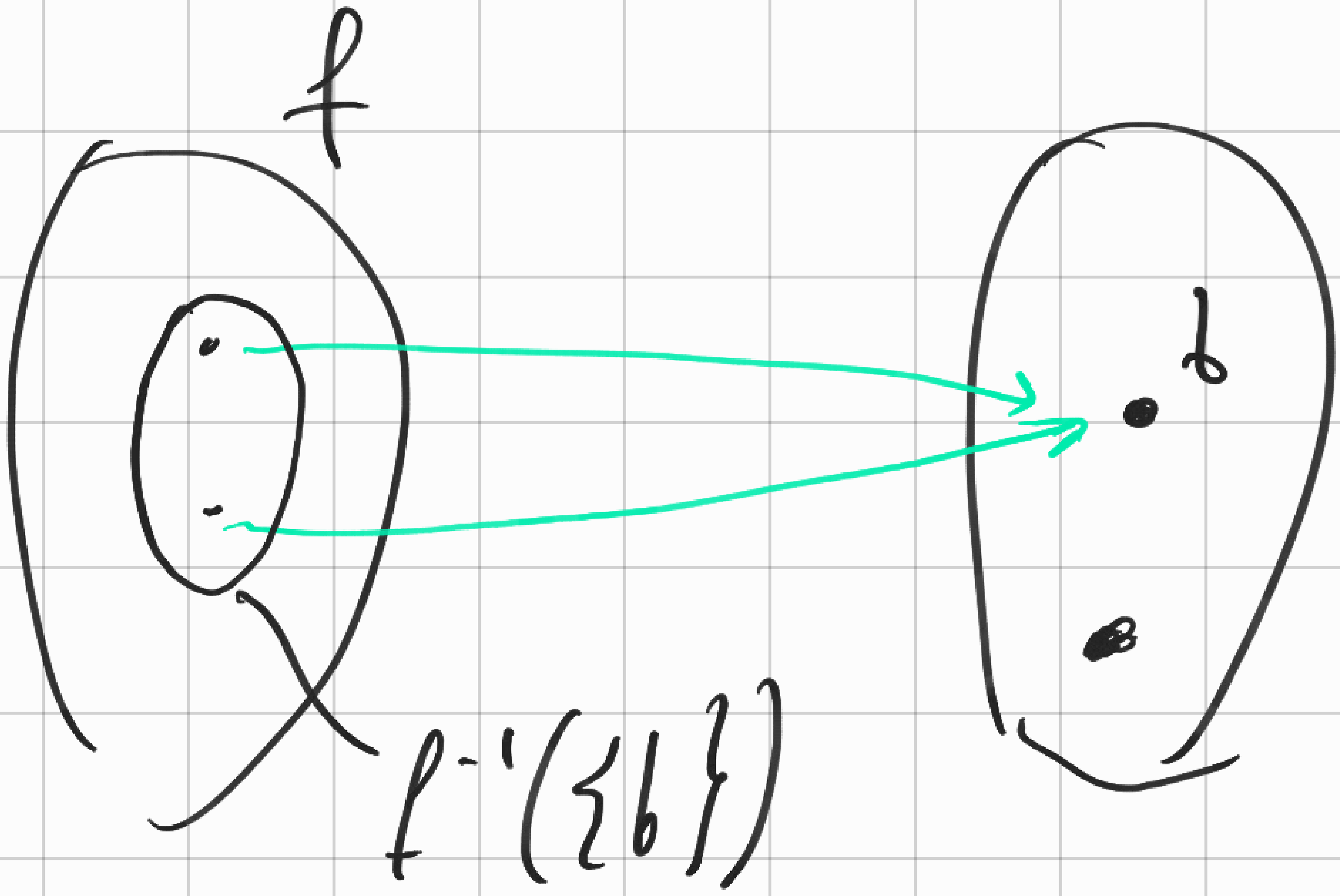
se non vale l'uguaglianza vale almeno una inclusione?

Definizione equivalente:

f è **suriettiva** $\iff \forall b\in B: f^{-1}(\{b\})\neq\emptyset$

f è **iniettiva** $\iff \forall b\in B: f^{-1}(\{b\})$ ha meno di 2 elementi.

f è **biettiva** $\iff \forall b\in B: f^{-1}(\{b\})$ è un singoletto



Esempio Risolvere l'equazione $f: A \to B$

$$f(x) = b$$

significa determinare $f^{-1}(\{b\})$

Infatti l'insieme delle soluzioni è $\{x \in A : f(x) = b\}$

Esempio Risolvere $f(x) \geq b$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

significa determinare

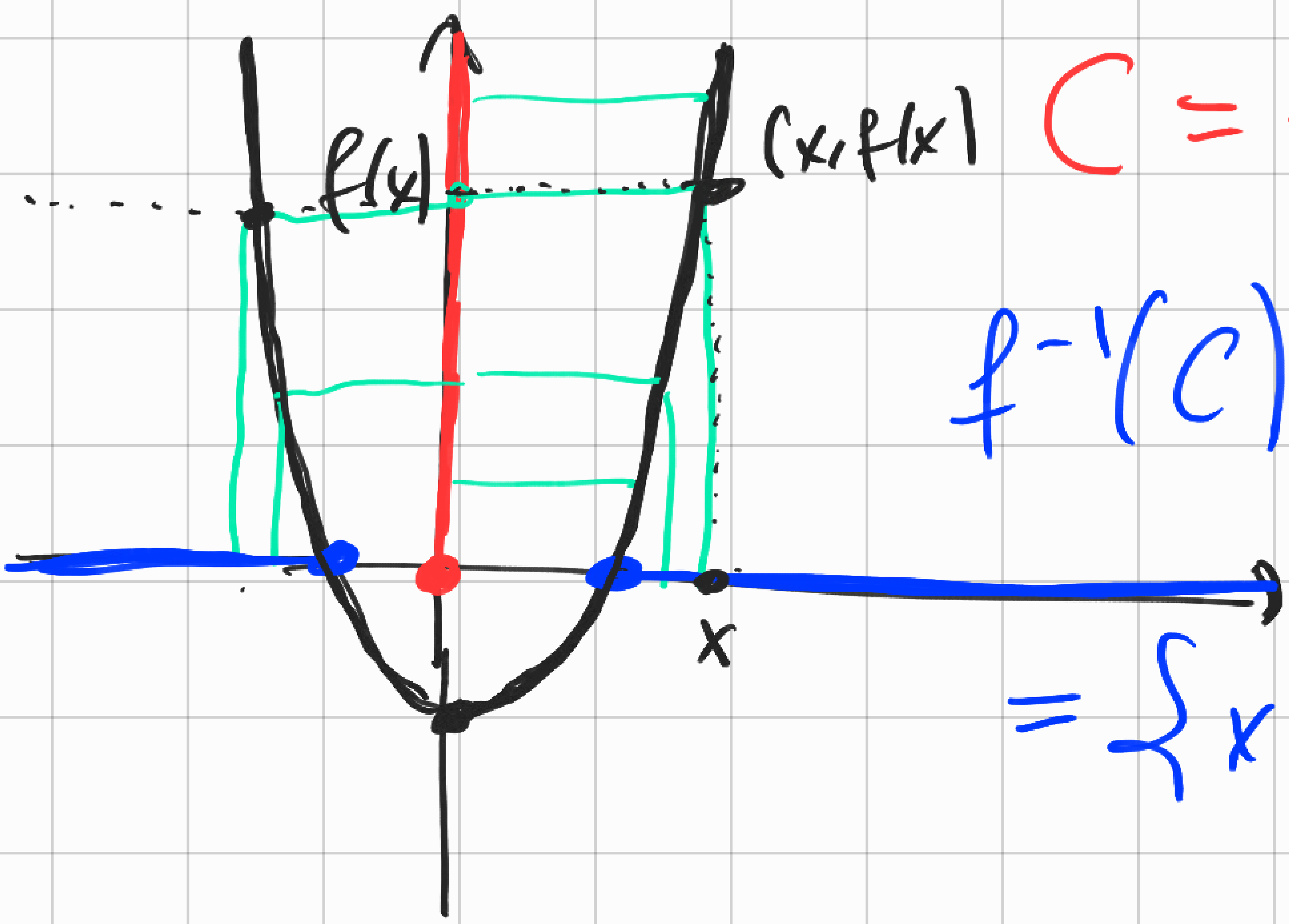
$$f^{-1}([b, +\infty[)$$

$C = [6, +\infty[= \{ y \in \mathbb{R} : y \geq 6 \}$

Esempio dell'Esempio

Risolvere $\quad x^2 - 1 \geq 0$

$$f(x) = x^2 - 1$$



$C = \{ y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \}$

$f^{-1}(C) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1 \}$

Invertire una funzione f significa risolvere in x l'equazione $\quad y = f(x)$

$$\vdots$$

$$x = f^{-1}(y)$$

ES

$$f(x) = 3x - 2$$

$$f^{-1}(y) = ?$$

$$y = 3x - 2$$

$$y + 2 = 3x$$

$$\frac{y+2}{3} = x$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}.$$