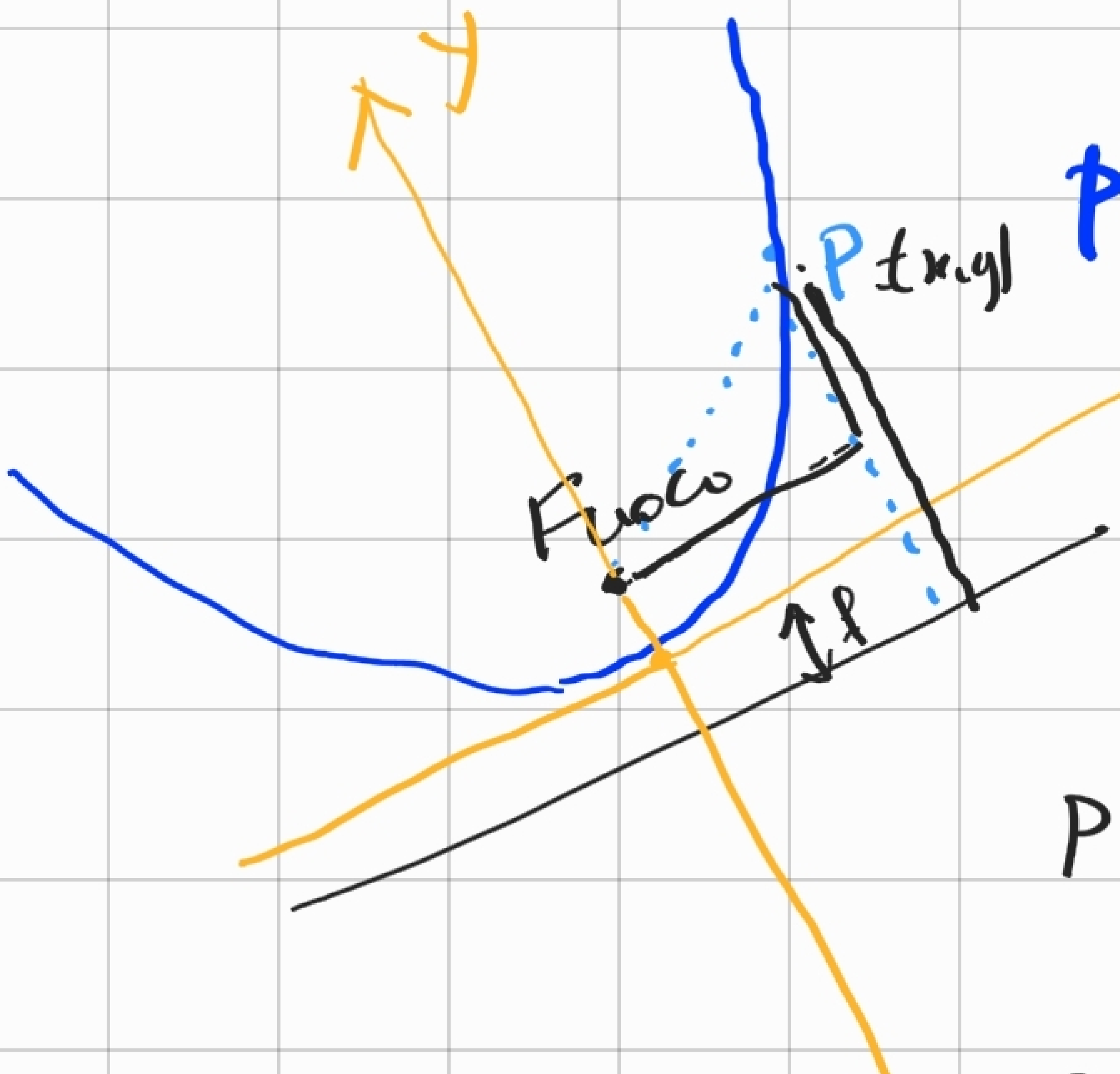
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 30 – 2.12.2020



direttrice $y=-f$

Fuoco $(0,f)$

$P=(x,y)$

$$x^2+(y-f)^2=(y+f)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}+\cancel{f^2}-2fy=\cancel{y^2}+2fy+\cancel{f^2}$$

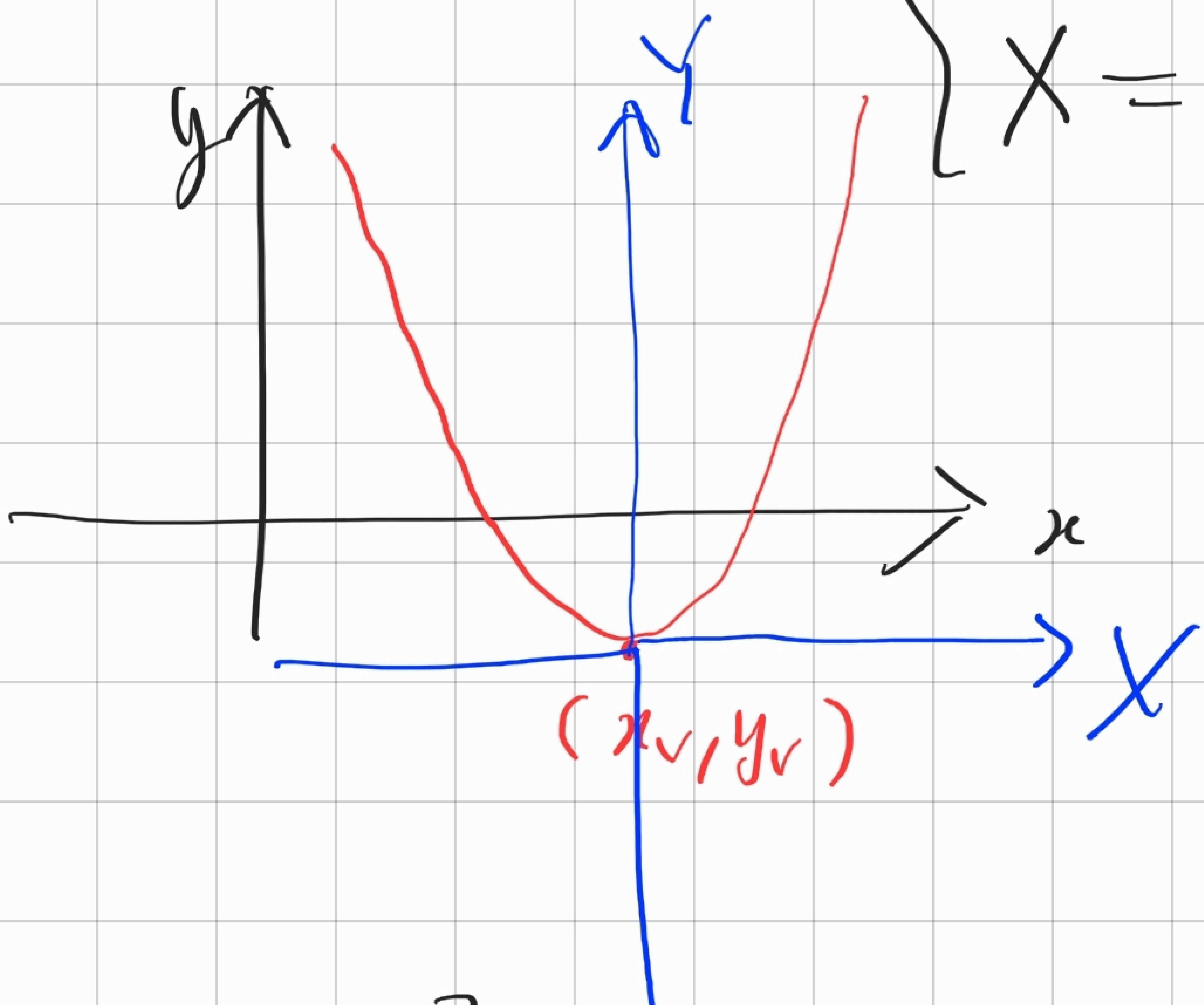
$$4fy=x^2$$

$a=\frac{1}{4f}$ $\qquad \boxed{y=ax^2}$

riscalando opportunamente $\longrightarrow$ $y=x^2$

traslando $\quad Y = aX^2$

$$\begin{cases} Y = y - y_v \\ X = x - x_v \end{cases}$$



$$Y = aX^2$$

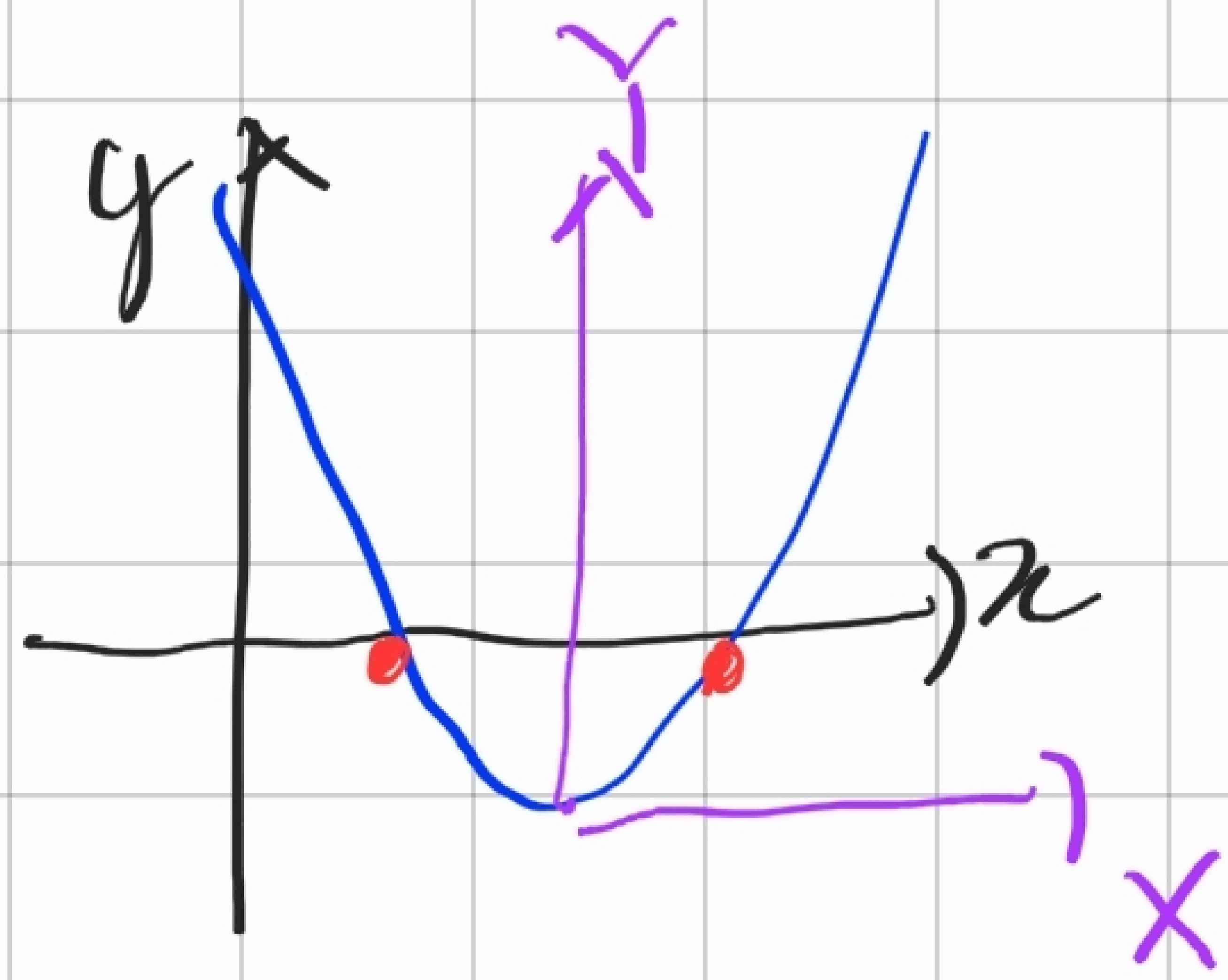
$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Equazioni di II grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \boxed{a \neq 0}$$



idea:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$Y = aX^2$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

completamento del quadrato

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} \\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

$\rightarrow \quad ax^2+bx+c=0$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

$X^2=C$

$C<0$: 0 sol.

$C=0$: 1 sol, $X=0$

$C>0$: 2 sol, $X=\pm\sqrt{C}$

$\Delta<0$ non ci sono soluzioni

$\Delta=0$ 1 sola soluzione $\quad x=-\frac{b}{2a}$

$\Delta>0$ 2 soluzioni:

$$x_{12}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\boxed{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

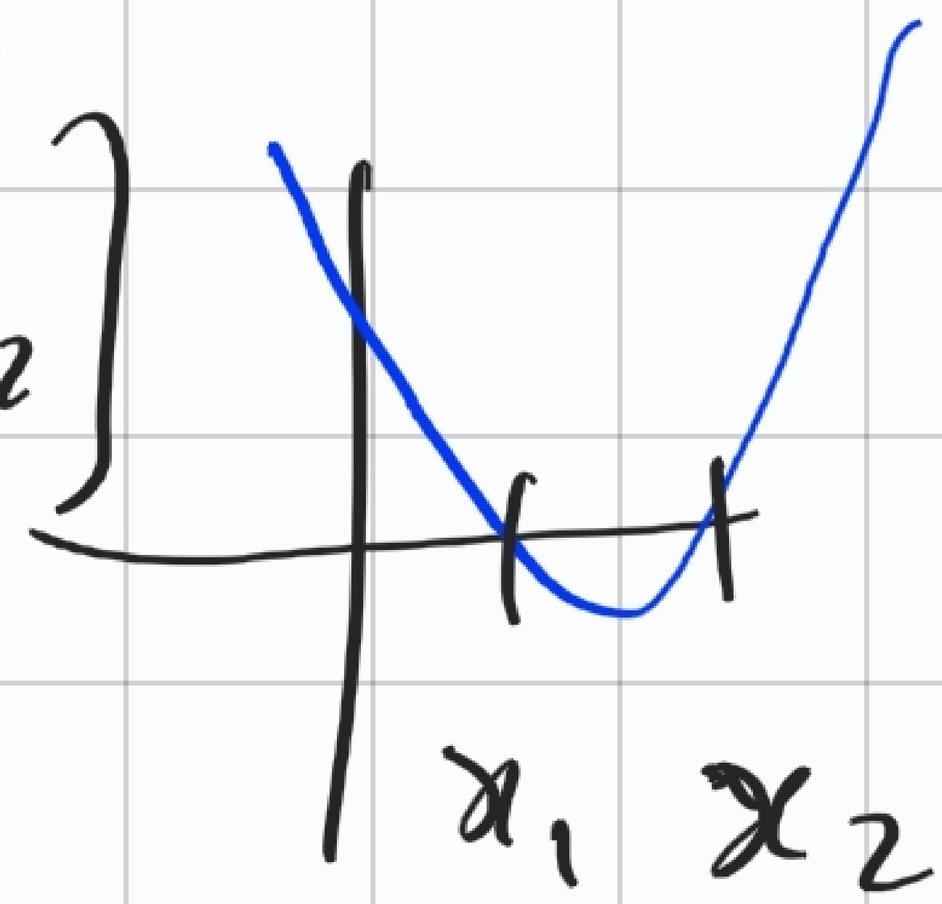
$$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

$ax^2+bx+c \gtrless 0$

$\parallel$

$x^2\left[a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right]$

$a>0$



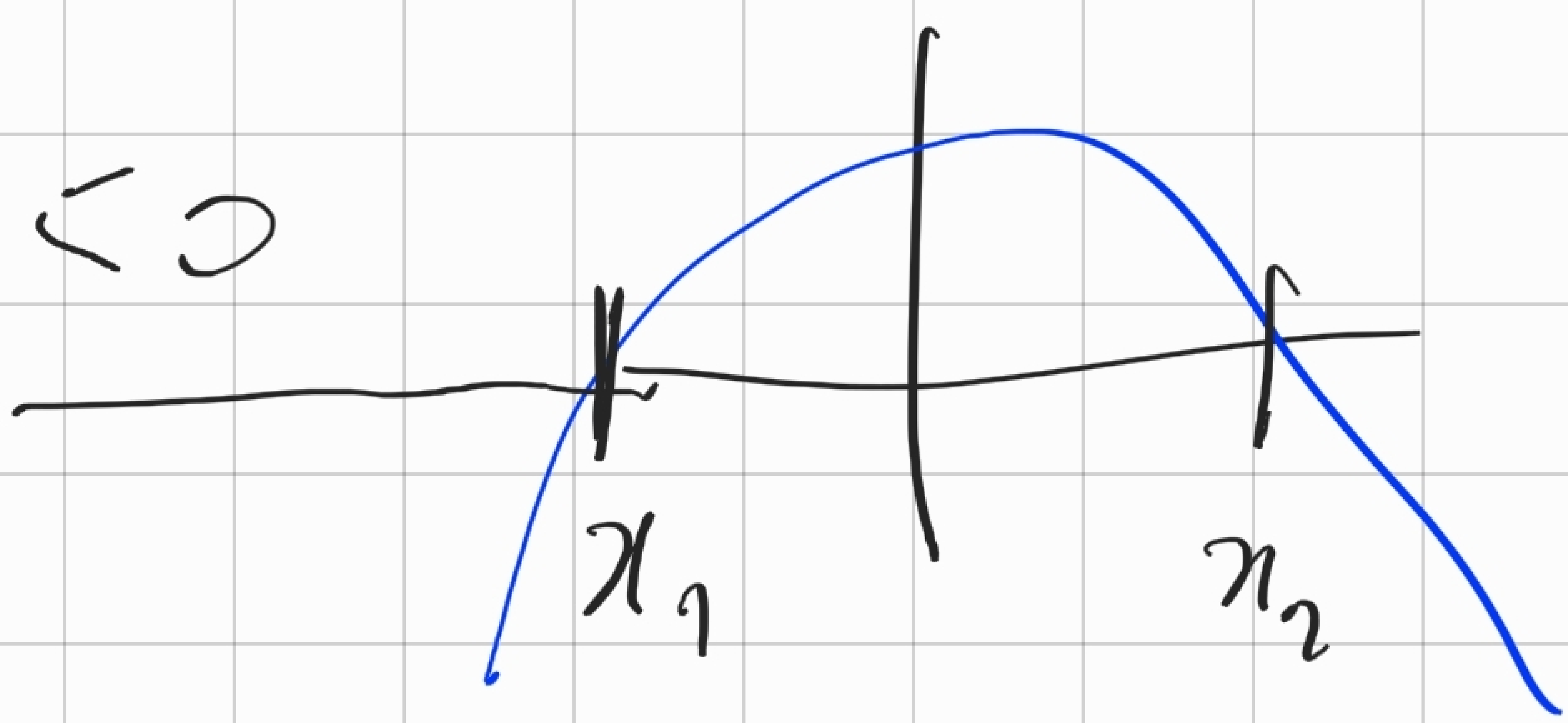
$ax^2+bx+c>0$ se $x>x_2$

o $x<x_1$

$ax^2+bx+c<0$ se $x_1<x<x_2$

---

se $a<0$



SISTEMI DINAMICI DISCRETI

Esempio fissato $p > 1$
$$\begin{cases} a_0 = p \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \end{cases}$$

allora $a_n \to \sqrt{p}$.

---

n tempo discreto

$$\longrightarrow \begin{cases} a_0 = \alpha \leftarrow \text{stato iniziale} \\ a_{n+1} = f(a_n, n) \end{cases}$$

sistema del I ordine

[II ordine $\to$ $a_{n+2} = f(a_{n+1}, a_n)$]

Se f non dipende dal "tempo" n

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

diremo che il sistema è "autonomo"

[Noi vedremo più in dettaglio solo i sistemi autonomi, del I ordine, scalari

$\uparrow$

$a_n \in \mathbb{R}$]

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}} \quad \Big| \quad f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Esempi che escono da questa formulazione.

(1) Fattoriale:
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1) \end{cases}$$

non è autonomo: $a_{n+1} = f(a_n, n)$

$$f(x, n) = x \cdot (n+1)$$

(2) Successione di Fibonacci.

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\dots$

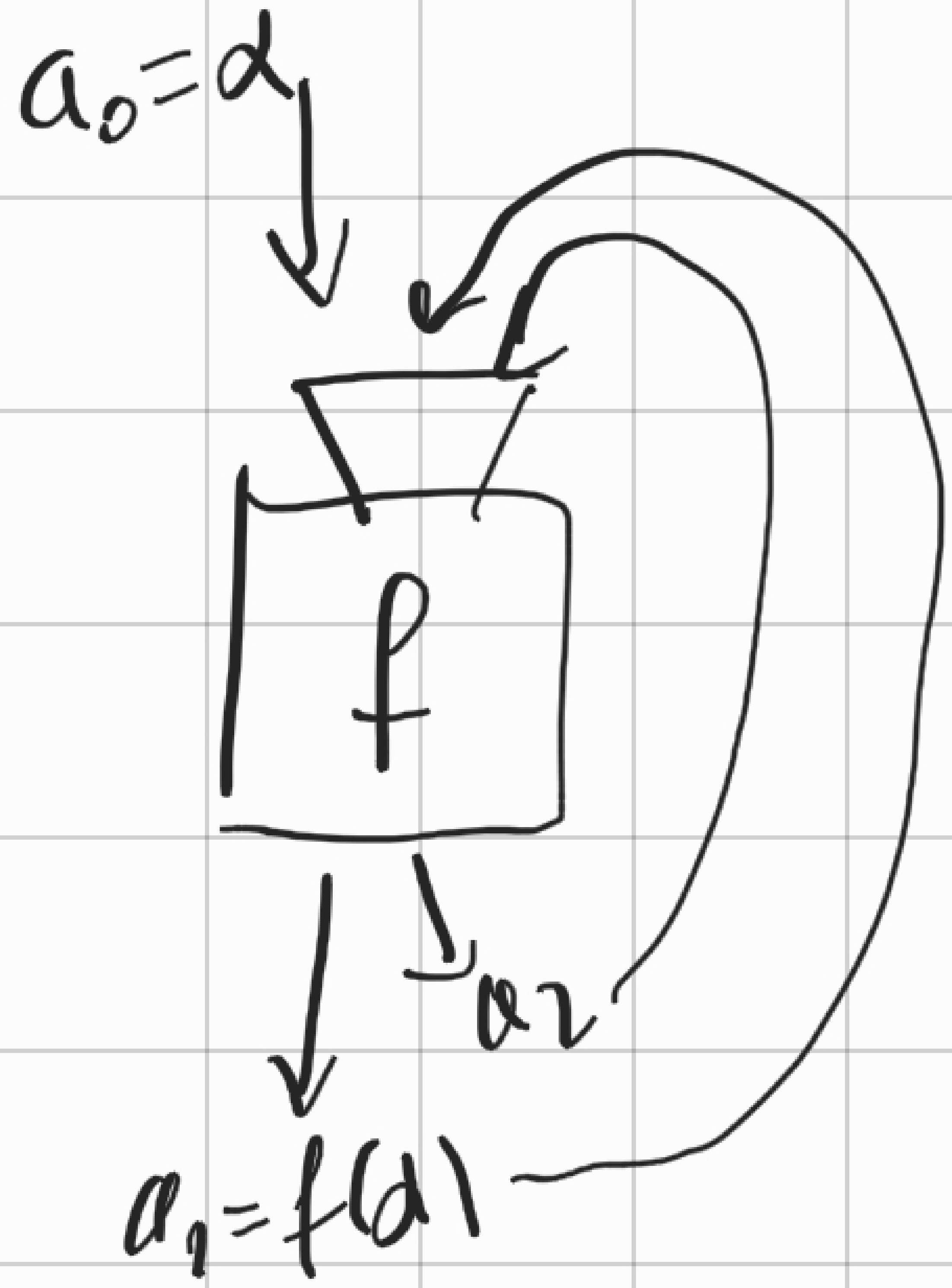
$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

II ordine (lineare)

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

$a_0 = \alpha$, $a_1 = f(\alpha)$, $a_2 = f(f(\alpha))$

$\dots\dots$ $a_n = \underbrace{f(f(f \dots f}_{n\text{-volte}}(\alpha)\dots)$



[Erone

$$f(x) = \frac{x + \frac{p}{x}}{2}$$
]

Def (punto fisso) Se $\boxed{f(x) = x}$

diremo che x è pto fisso di f.

Nota: se α è un punto fisso

$\Rightarrow$ $a_n = \alpha$ è costante.

Osservazione importante:

Se a_n converge, $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

e se f è continua $\quad a_{n+1} \to \ell$

allora

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

per $n \to +\infty$ $\downarrow$ $\downarrow$ ← f continua

$$l = f(l)$$

$\Rightarrow$ l è un punto fisso di f.

ES (Erone) $f(x) = \dfrac{x + \frac{p}{x}}{2}$

$f(x) = x$ $\dfrac{x + \frac{p}{x}}{2} = x$

$x + \dfrac{p}{x} = 2x$ $x = \dfrac{p}{x}$

$x^2 = p$ $x = \pm\sqrt{p}$

$\sqrt{p}$ e $-\sqrt{p}$ sono gli unici punti fissi di f.

Def (insieme invariante)

Diremo che un insieme I è invariante per f se

$$x \in I \Rightarrow f(x) \in I$$

Oss Se $\alpha \in I$, I invariante allora $a_n \in I \quad \forall n$.

Oss 2 Se $a_n \in I$, I invariante allora $a_k \in I \quad \forall k \geq n$

[**Oss 3** se I fosse finito, $\alpha \in I$ a_n risulta periodica]

Esempio [Erone] $f(x) = \dfrac{x + \frac{\beta}{x}}{2}$

Dimostrare che $a_n > 0$ $\forall n$ è equivalente a mostrare che l'intervallo $(0, +\infty)$ è invariante. $(p>0)$

$$x>0 \Rightarrow \frac{p}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x+\frac{p}{x}}{2} > 0$$

Anche $[\sqrt{p}, +\infty)$ è invariante

Se $x>0 \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{p}$

Teorema (monotonia) Se I è invariante e $\forall x \in I$

$f(x) \geq x$ $(\leq)$, se $\alpha \in I$

allora a_n è (de)crescente.

dim

$$a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n \quad (\leq)$$

$$\| $$

$$f(a_n)$$

Hyp se $x \in I \Rightarrow \boxed{f(x) \geq x} \ (\leq)$

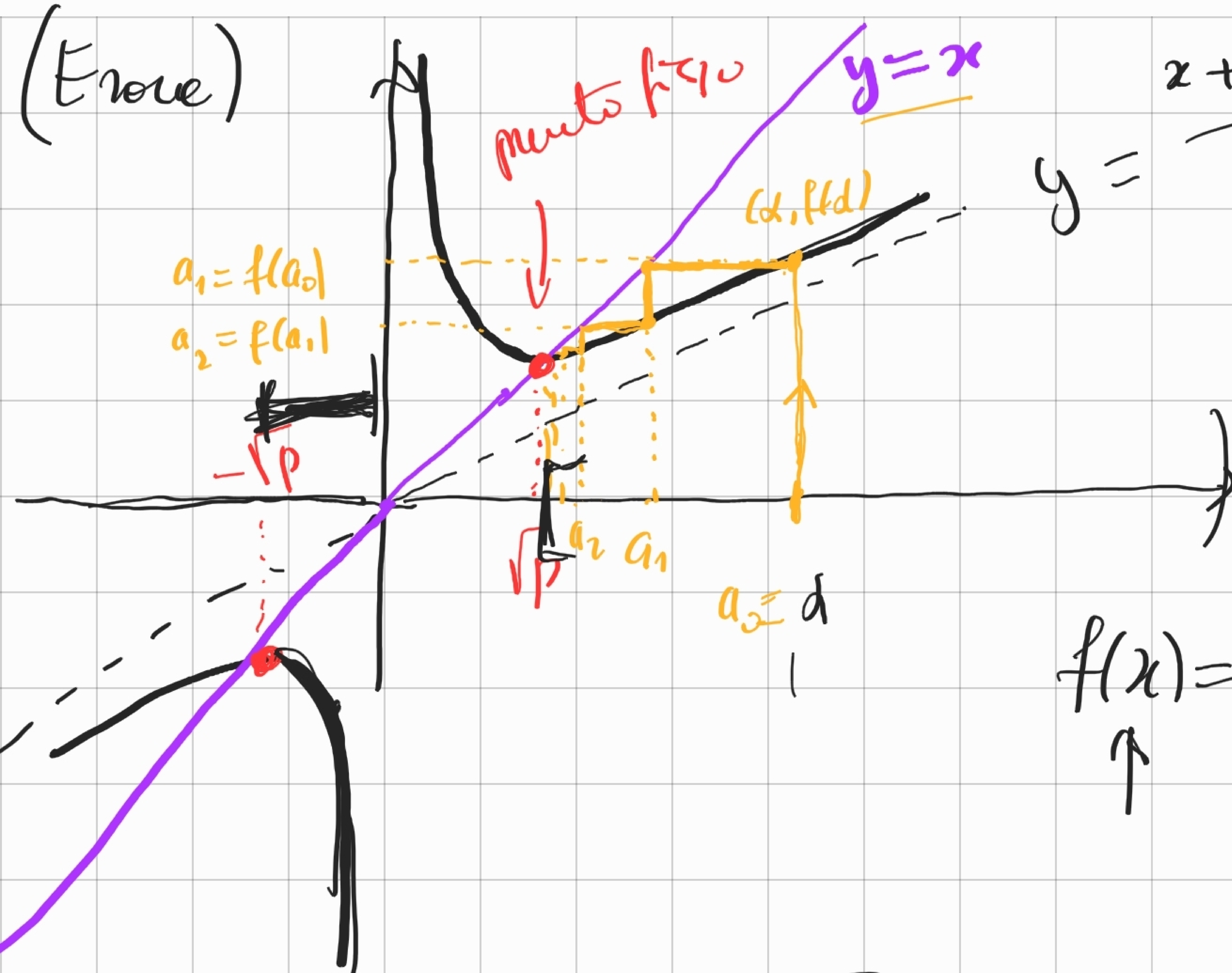
$\underbrace{\text{Se } a_n \in I \ \forall n}$ $\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \ (\leq)$

$$\Uparrow$$

$\alpha \in I$

$\underbrace{I \text{ è invariante}}$ $\square$

(Errore)

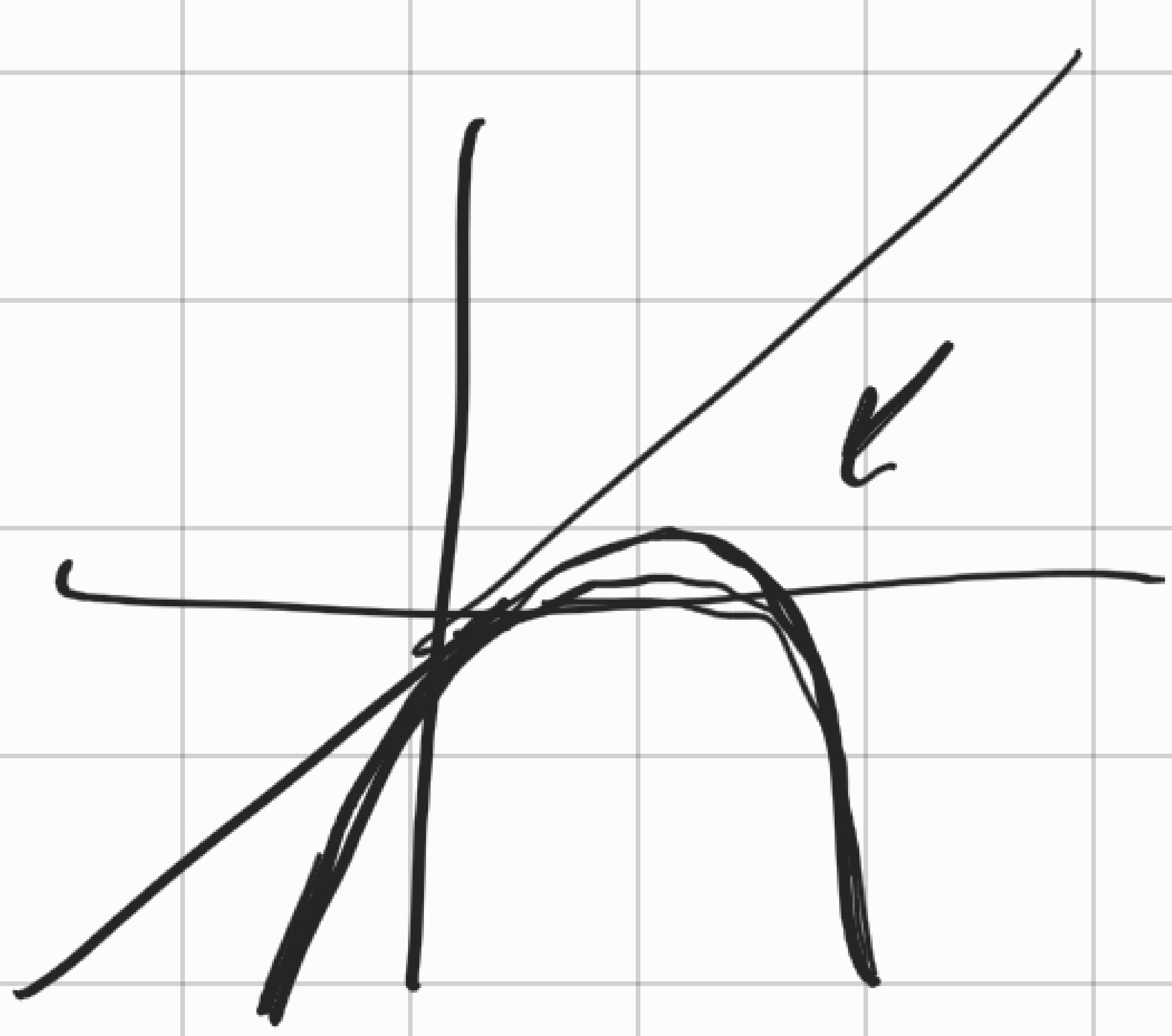


$$y = \frac{x + \frac{p}{x}}{2}$$

$f(x) = x$

$$f(x) = x - x^2$$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases}$$



Trovo i punti fissi

$f(x) = x \qquad x - x^2 = x$

$x^2 = 0$

$x = 0$ è l'unico punto fisso.

$\cancel{x} - x^2 \leq \cancel{x} \qquad -x^2 \leq 0$

$f(x) \leq x \quad \forall x.$

$\mathbb{R}$ è invariante

a_n è decrescente.

$a_n \to \ell.$

Se $\alpha > 0 \overset{?}{\Rightarrow} \ell = 0$

Devo trovare I tale

che $x \in I \Rightarrow f(x) > 0$

$$x - x^2 > 0$$

$x(1-x) > 0$ se $x \in (0,1)$

$\underline{I} = (0,1)$ è invariante?

...... VERIFICO.....

$$x \in (0,1) \Rightarrow x - x^2 \in (0,1)$$

... SÌ è invariante.

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow a_n \in (0,1) \quad \forall n.$$

a_n decrescente $(f(x) \leq x)$

$a_n \to \ell \qquad \ell \in [0,1]$

a_n converge $\Rightarrow \ell = 0$

unico punto fisso $\left(\text{in } [0,1]\right)$ —

$a_n \to 0 \quad$ se $\alpha \in [0,1]$

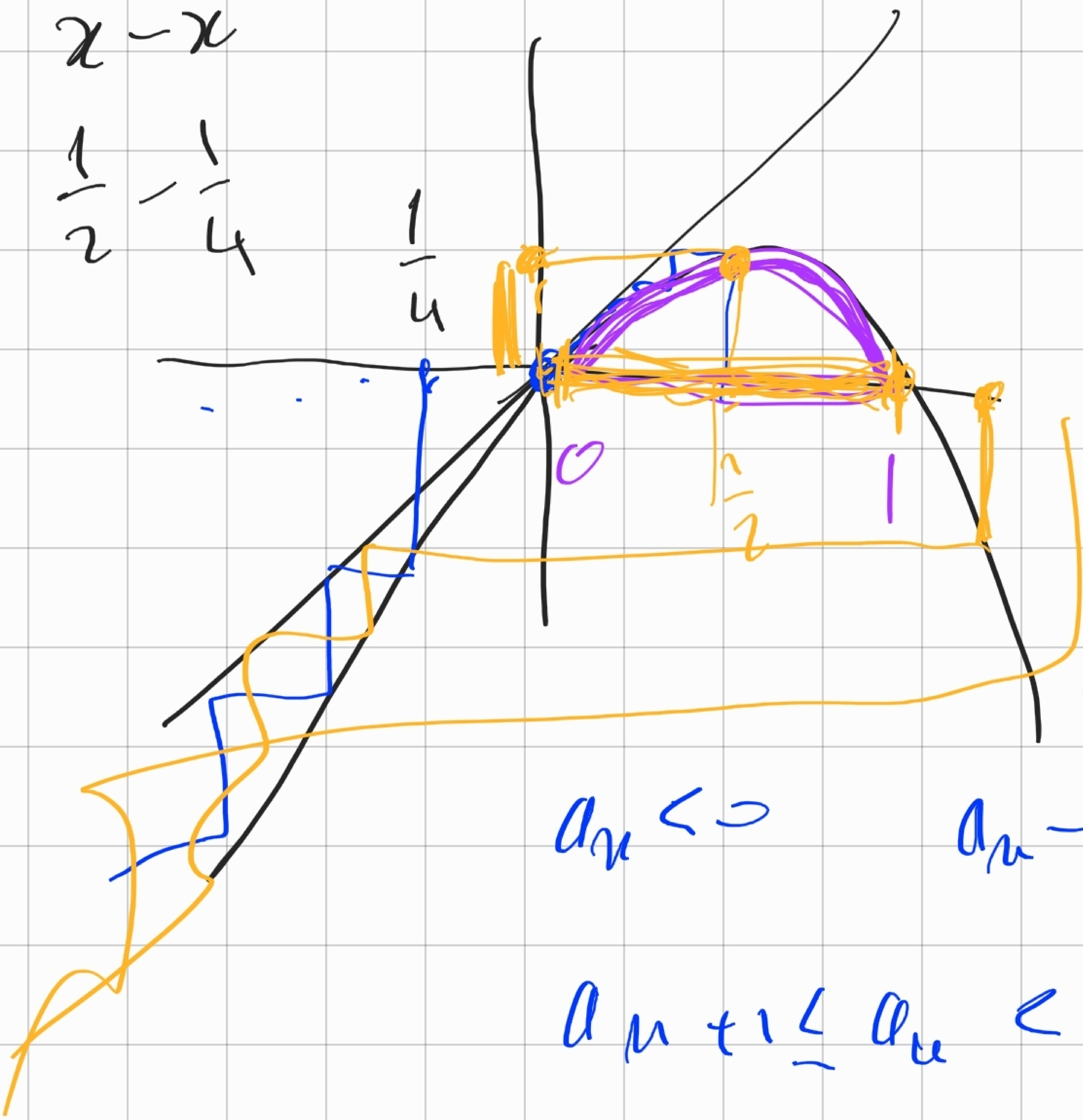
$\square$

se $\alpha > 1$
o $\alpha < 0$ $\Big\}$ $a_n \to -\infty$

(prossima volta)

$x - x^2$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$



$f(x) < x$

$a_n > 0$

$f(x) > 0$

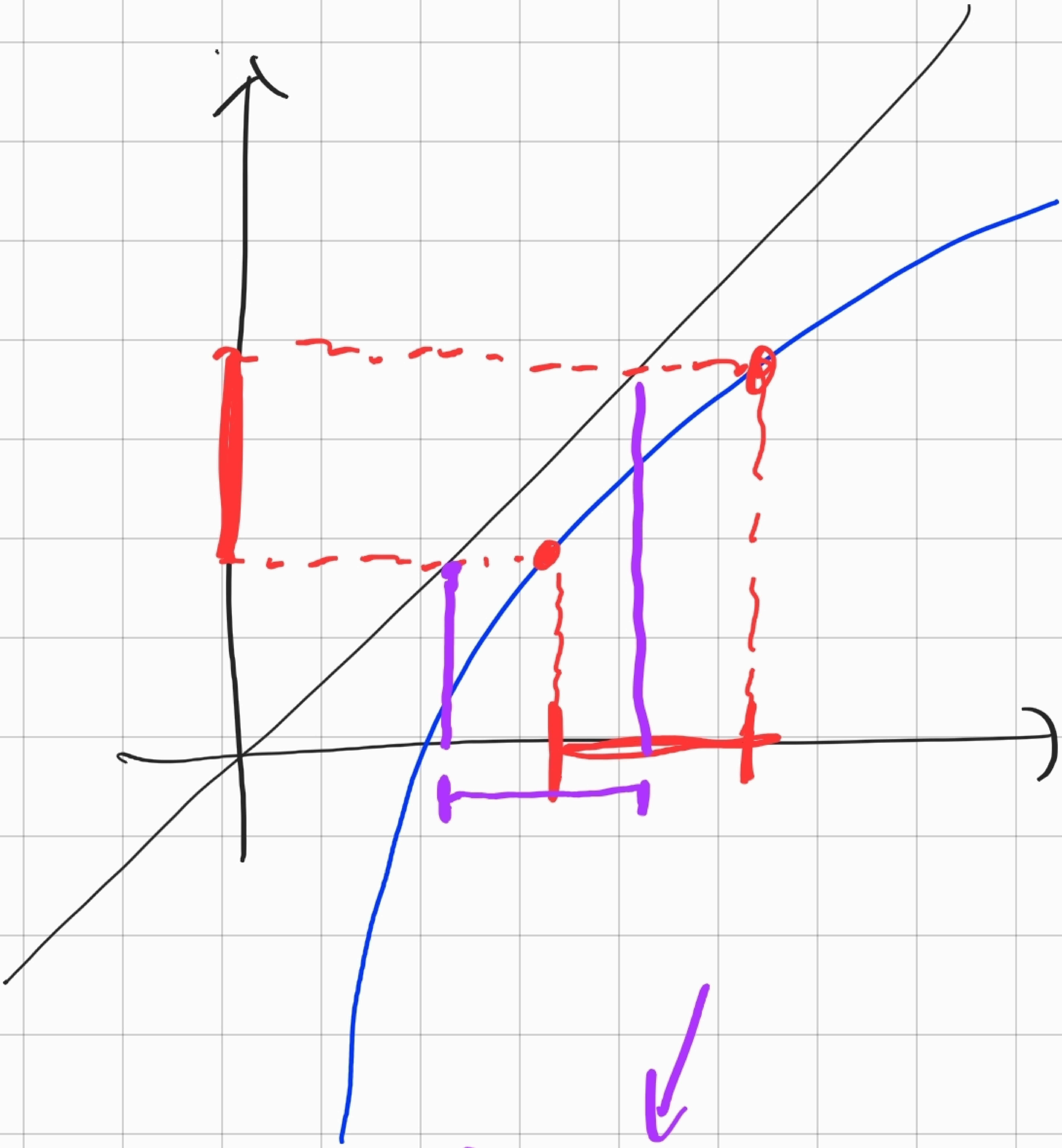
$a_{n+1} = f(a_n)$

$a_n < 0$

$a_n \to -\infty$

$a_{n+1} \leq a_n < 0$

$$[0,1] \xrightarrow{f} [0, 1/4] \subseteq [0,1]$$



$f: X \longrightarrow X$

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\left[u'(t) = f(u(t), t) \right]$$