ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 31 - 7.12.2020

test settimanale

Es 6
$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{1-a_n^2} = f(a_n) \end{cases}$$

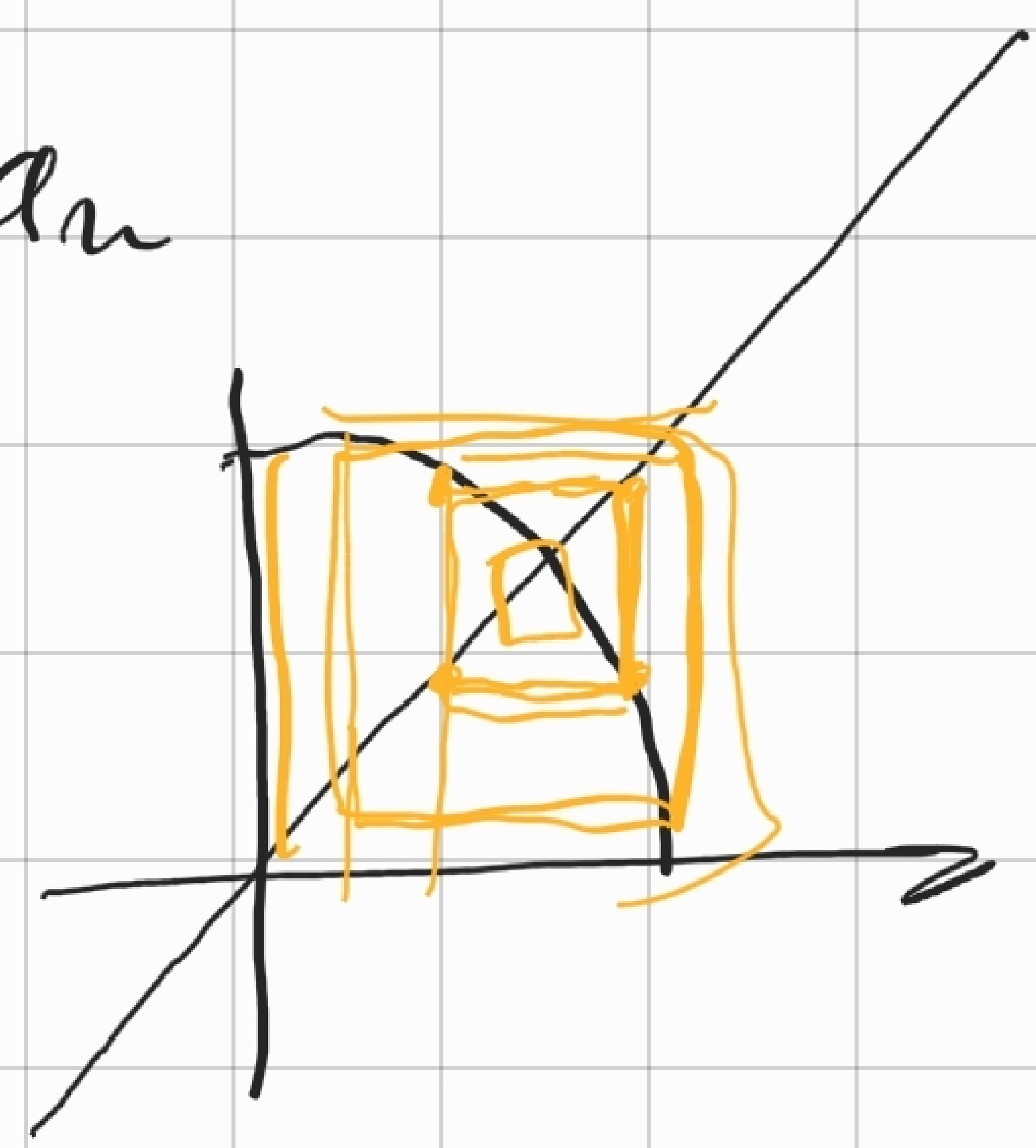
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(f(x)) = \sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{1-(1-x^2)}$$
$$= \sqrt{x^2} = |x| = x \quad \text{se } x \in [0,1]$$

$$a_{n+2} = f(f(a_n)) = a_n$$

$$\frac{1}{2} = a_0 = a_2 = a_4 \dots$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}} = a_1 = a_3 = a_5 \dots$$



f decrescente in $[0,1]$

a_{2n} monotona $\to l$

a_{2n+1} monotona $\to l'$

l, l' sono punti fissi

di $f \circ f$

$$f(f(x)) = |x|$$

tutti punti di $[0,1]$ sono fissi per $f \circ f$.

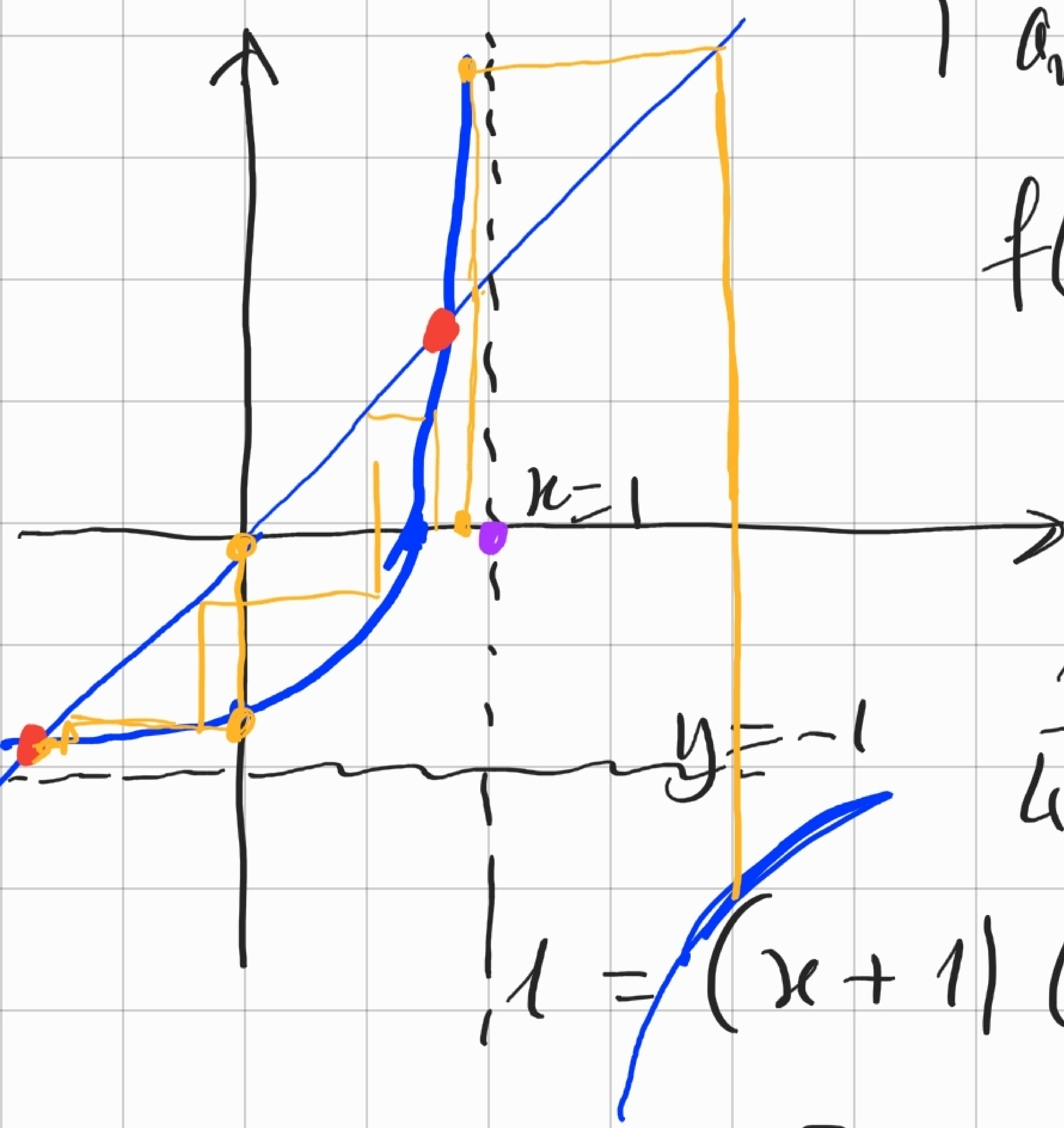
$\Rightarrow$ a_{2n} costante $|$ $a_{2n} = a_0 = \frac{1}{2}$

a_{2n+1} costante $|$ $a_{2n+1} = a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a_{2n+2} = f(f(a_{2n}))$$

$$a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1})).$$

Esercizio 5



$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4-4a_n} - 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{4-4x} - 1$$

punti fissi

$$\frac{1}{4-4x} = x+1$$

$$1 = (x+1)(4-4x)$$

$$= -4x^2 - 4x + 4x + 4$$

$$4x^2 = 3 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha = 0$ $\quad I = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

Es 3 è invariante perché

f è crescente su I

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$f(x) \le x$ invariante

se $\alpha \in I \Rightarrow a_n \in I \ \forall n$

$$a_{n+1} = f(a_n) \le a_n$$

a_n decrescente $\Rightarrow a_n \to l$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le a_n \le a_0 = \alpha = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le l \le 0 \quad (*)$$

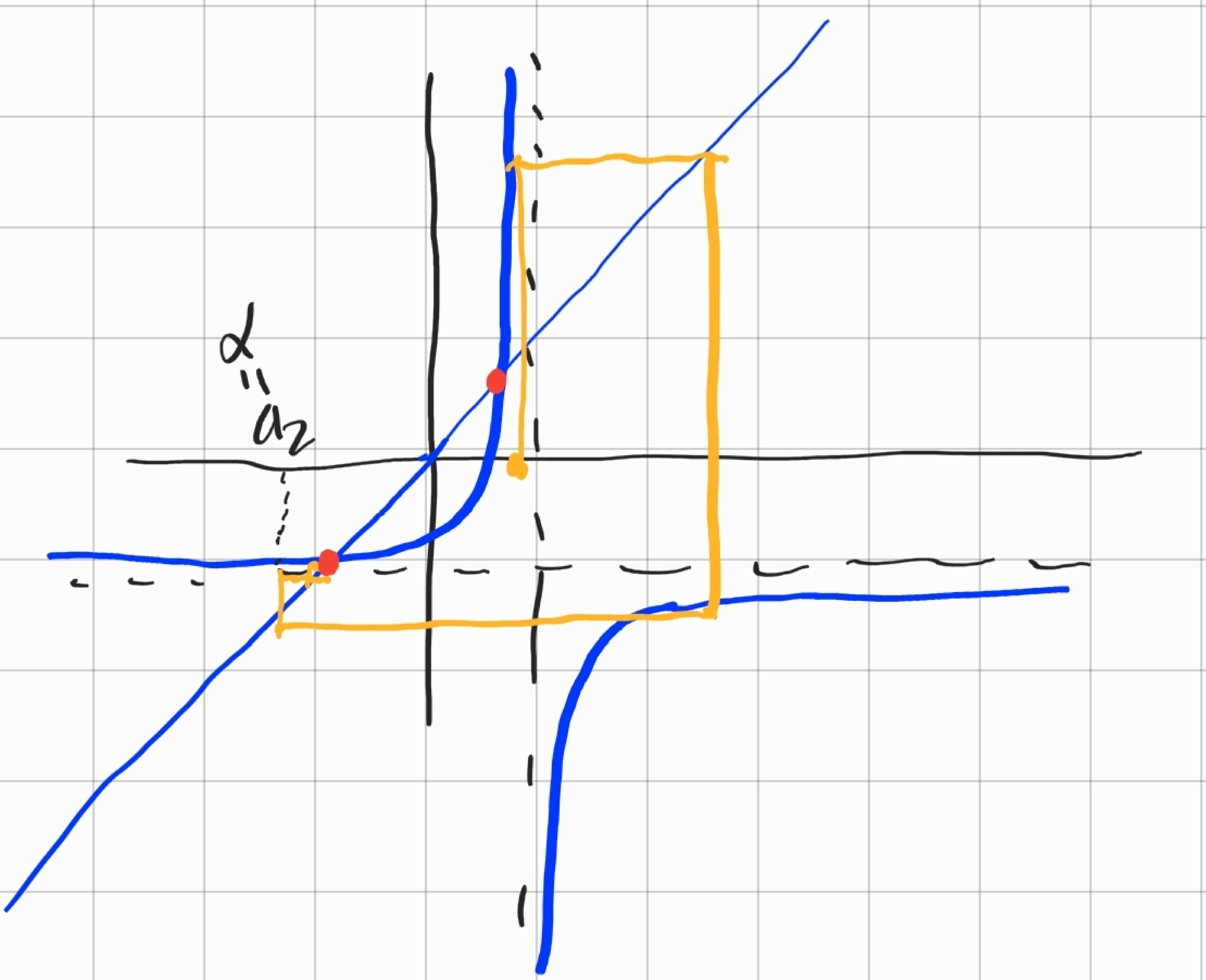
$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & & f(\ell) \end{array}$$

f continua in ℓ

ℓ è un punto fisso $\ell = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(*)

$\boxed{\text{Es } 4}$ $\alpha = \frac{2020}{2021} > \frac{\sqrt{3}}{2}$



$a_0 = \frac{2020}{2021}$ a_1 grande (CI FIDIAMO) VERIFICA

$a_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = I = \left\{x : x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

I è invariante perché

f crescente

$$x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(x) \leq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow I$ invariante.

$a_n \in I \quad \forall n \geq 2$

$\boxed{f(x) \geq x}$ su I

$$\underbrace{a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n}$$

a_n crescente $(n \geq 2)$. $a_n \to l$

$$a_2 \leq a_n \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 \leq l \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

l è un punto fisso

$$l = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\boxed{\text{Es 5}}$ $\alpha = \frac{7}{8}$ succede qualcosa di brutto

$$a_{n+1} = \frac{1}{4-4a_n} - 1$$

$$a_1 = \frac{1}{4-\frac{7}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = \cancel{\frac{1}{4-4} - 1}$$

non è definito.

$$f(x) = \frac{1}{4-4x} - 1$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Non è del tipo $f : A \to A$.

Quando è definita la successione?

quando $\alpha = A \setminus C$

$C = \{$punti cattivi$\}$

$$= \{\alpha \in A : \exists n \ \overbrace{f(f(\dots(f(\alpha))\dots)}^{n\text{-volte}} = 1\}$$

$$= \{\alpha \in A : \exists n : f^n(\alpha) = 1\}$$

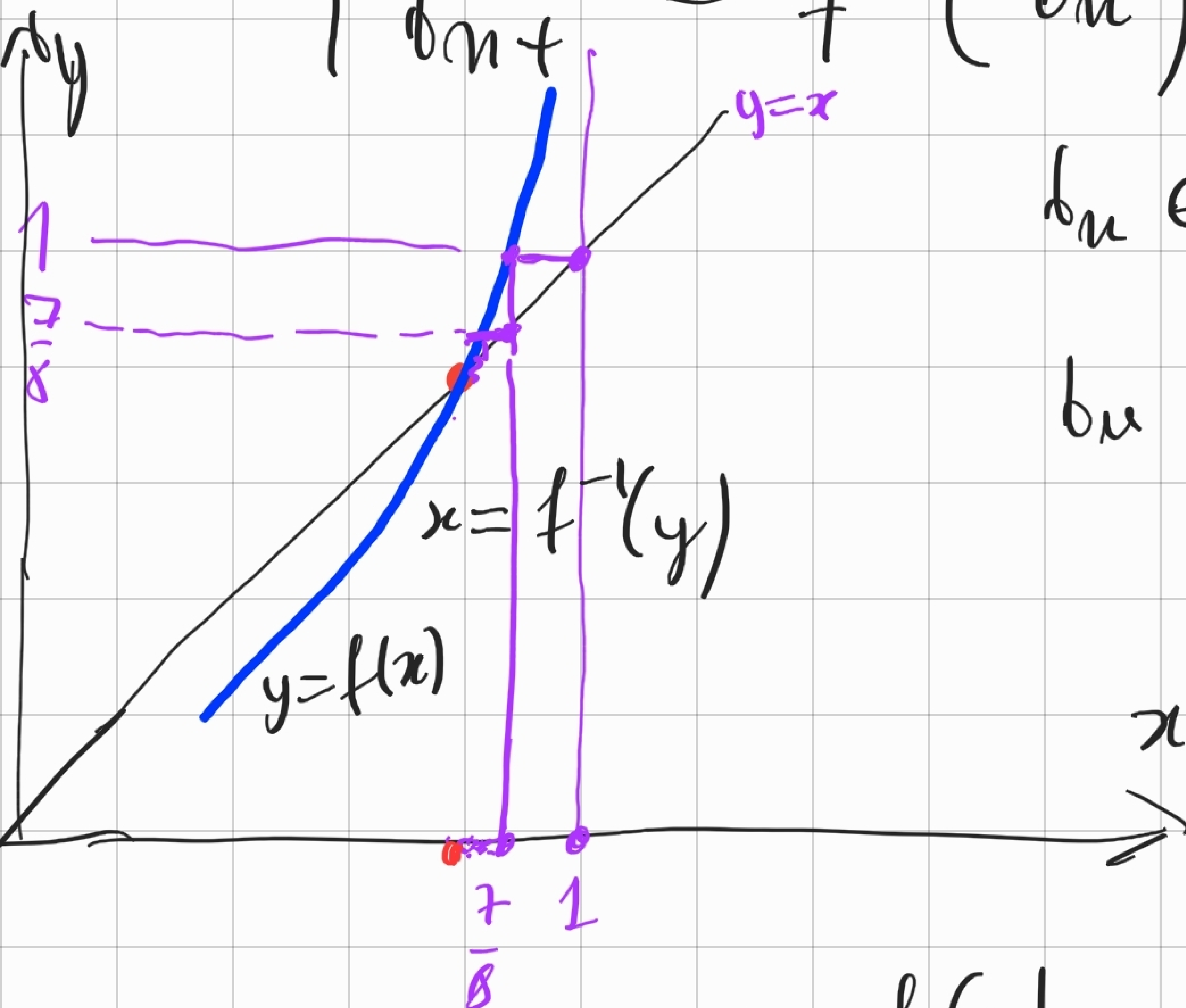
$$= \{1, \frac{7}{8}, ?, \dots\}$$

$$\alpha : f(\alpha) = \frac{7}{8}$$

$$\to f\left(\frac{7}{8}\right) = 1$$

$$= \{ b_0, b_1, b_2, \dots \}$$

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = f^{-1}(b_n) \end{cases}$$



$b_n \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]$

b_n decrescente

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{1}{4-4x} - 1$$

ricavo x

$$x = f^{-1}(y)$$

$$\frac{1}{4-4x} = y+1$$

$$4-4x = \frac{1}{y+1}$$

$$4x = 4 - \frac{1}{y+1}$$

$$f^{-1}(y) = x = 1 - \frac{1}{4y+4}$$

$f(x) > x$ per $x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

$f^{-1}(y) < y$ per $y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ è invariante per f^{-1}

$$b_n \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$C = \{b_n\}$ ha punto di accumulazione $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f : \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \xrightarrow{\text{invertibile}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le x < 1 \qquad f \text{ strett. crescente}$$

$$\downarrow f \quad \uparrow f^{-1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \le x < +\infty$$

$$\downarrow \qquad f^{-1} \text{ strett crescente}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le f^{-1}(x) < 1.$$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ è invariante

$$\downarrow f^{-1}$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \subseteq \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$$

$\left(\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \text{ non è invariante per } f \right)$

$f(x) \geq x$ in $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

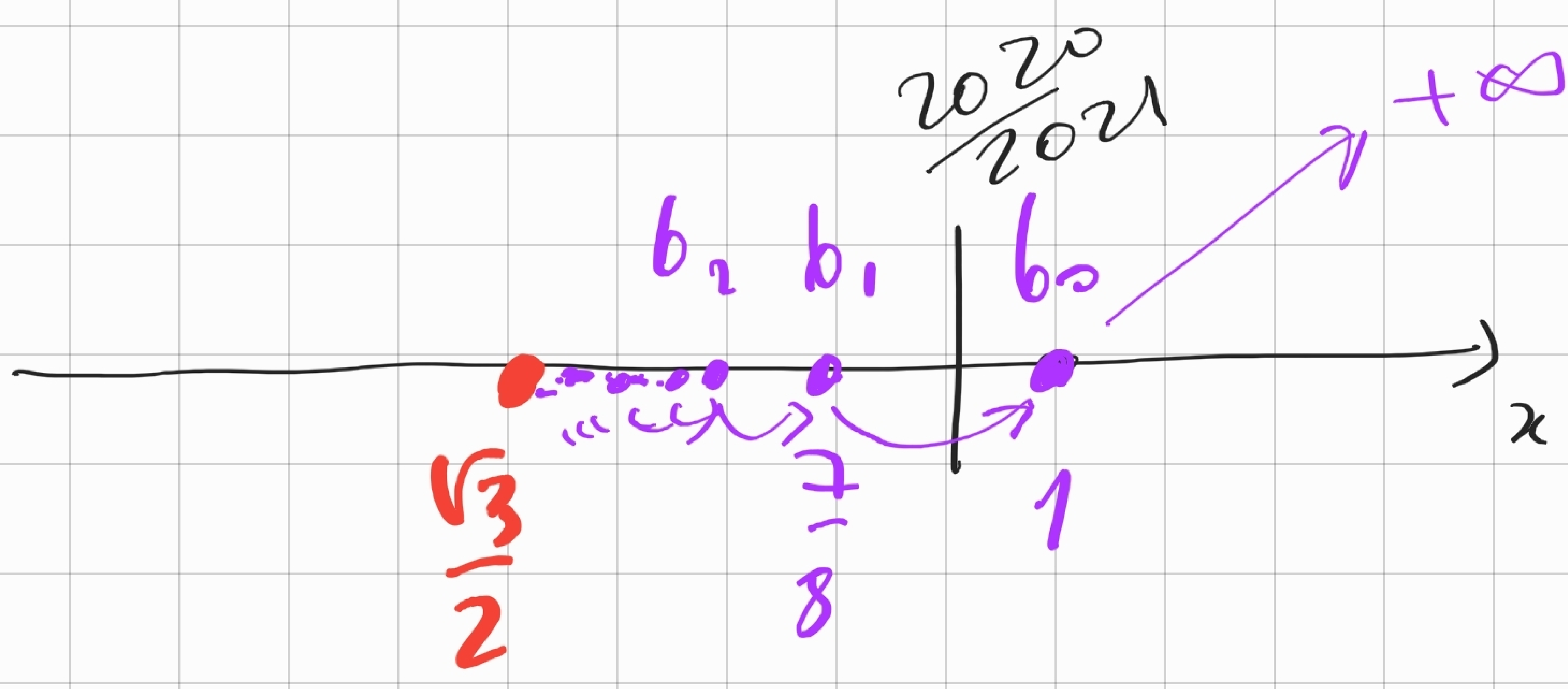
$x \geq f^{-1}(x)$ in $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

b_n decrescente.

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

$$a_n = f^{-1}(a_{n+1})$$

$\frac{7}{8} < \frac{2020}{2021} < 1$ $\qquad$ $\frac{2020}{2021}$ non è attrattivo



Esercizio (negli appunti 8.13)

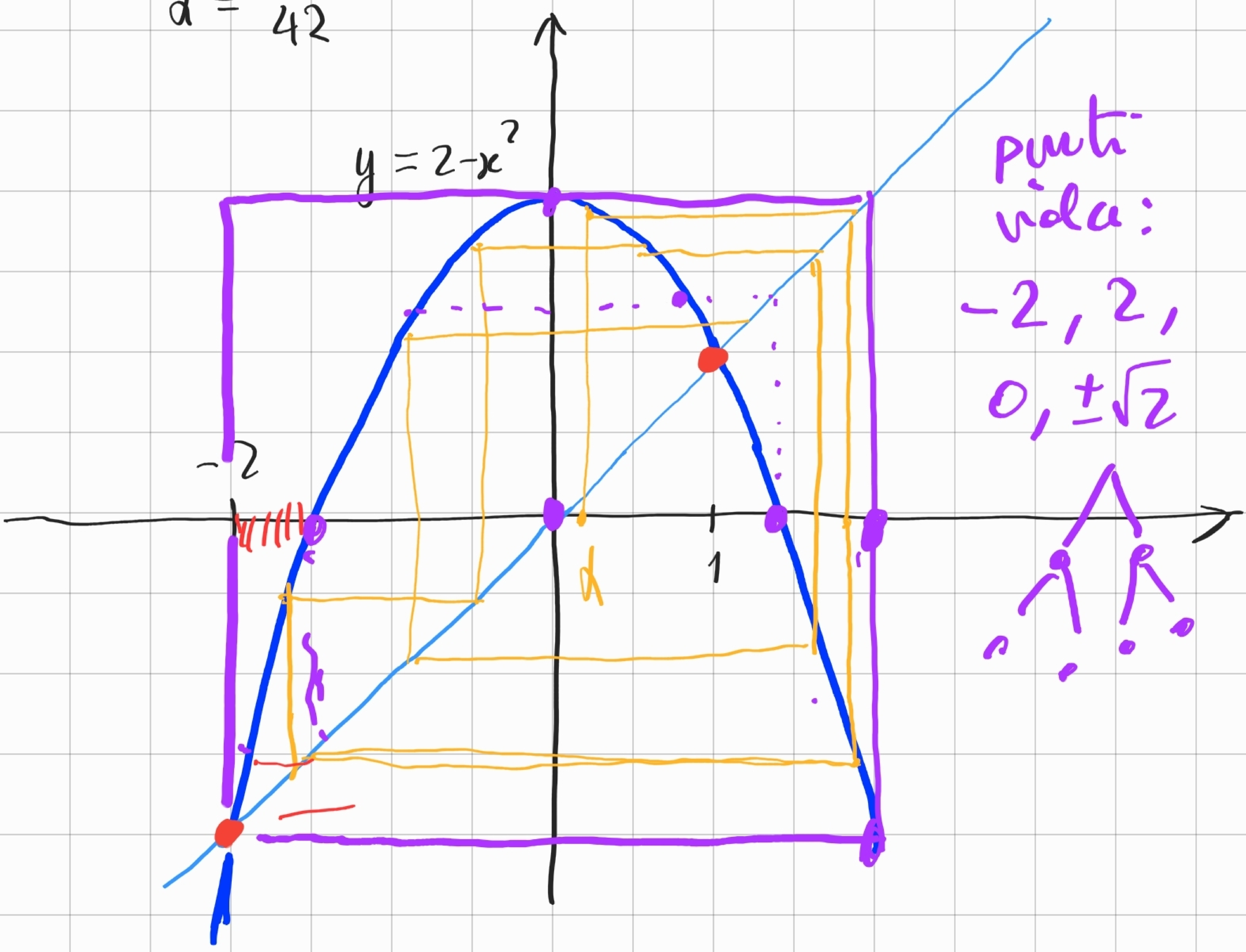
$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 2 - a_n^2 \end{cases} \qquad f(x) = 2 - x^2$$

$\alpha = -7 \to -\infty$

$\alpha = 4 \to -\infty$

} standard (guardate negli appunti)

$\alpha = \frac{1}{42}$



Idea a_n è "caotica"

a_n non converge..

$I=[-2,2]$ è invariante

f è crescente in $[-2,0]$

è decrescente in $[0,2]$

$$-2 \le x \le 0$$

$$\underset{\underset{-2}{\parallel}}{f(-2)} \le f(x) \le f(0)$$

$$-2 \le f(x) \le 2$$

$$0 \le x \le 2$$

$$\underset{\underset{-2}{\parallel}}{f(2)} \le f(x) \le f(0)$$

$$-2 \le f(x) \le 2$$

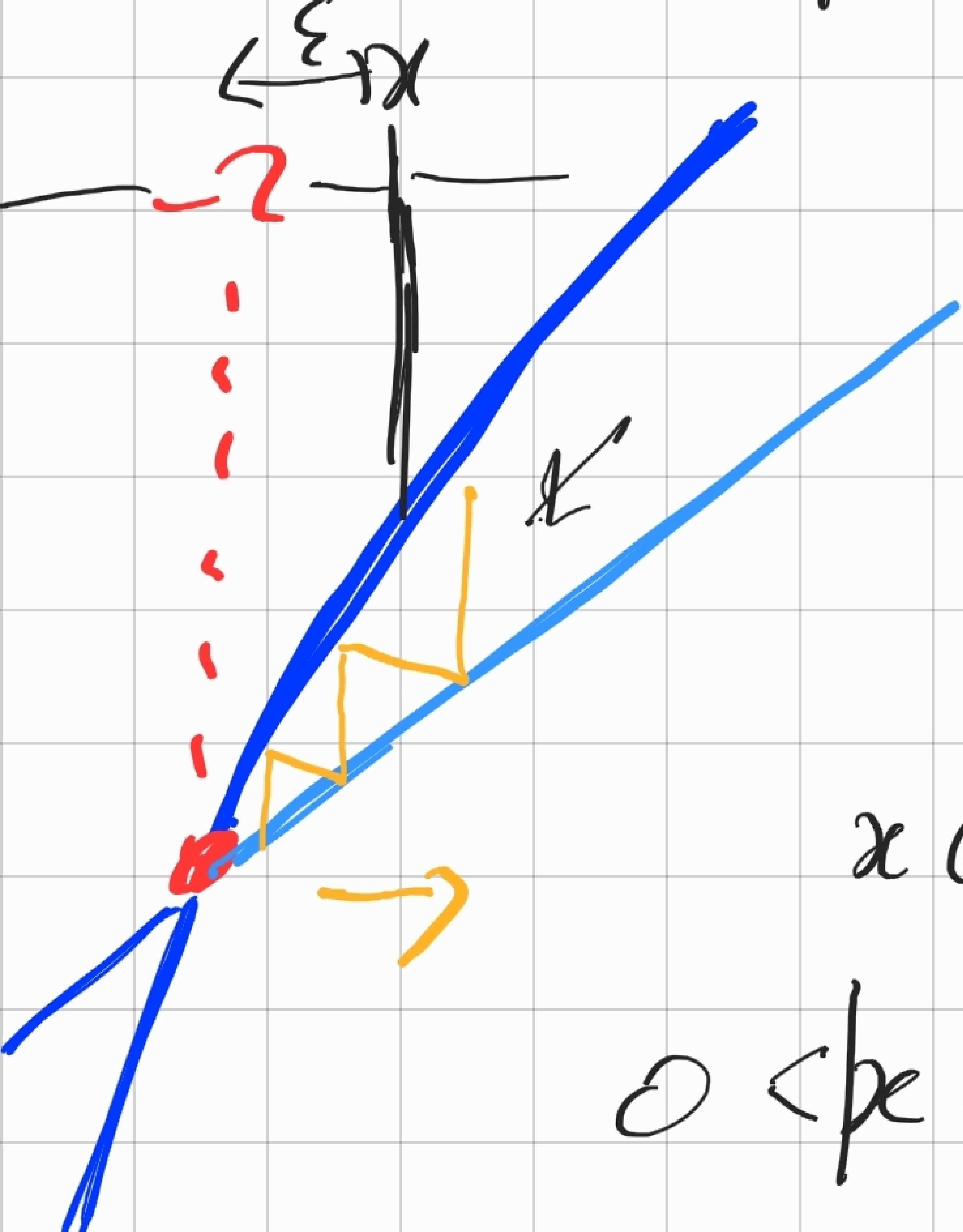
$[-2,2]$ è invariante

$\alpha \in [-2,2)$ $\boxed{\text{punti fissi}}$

$a_n \in [-2,2]$

Se $a_n \to \ell$, $\ell \in \{-2,1\}$

1. a_n non può tendere a -2
2. a_n non può tendere a 1



-2 punto fisso "repulsivo"

$x \in (-2,-2+\varepsilon)$

$0 < |x-(-2)| < \varepsilon$

$|f(x)-2| > |x-(-2)|$

$$-2 < x < 1$$

$$f(x) > x$$

$$|f(x) - (-2)| > |x - (-2)|$$

f aumenta la distanza dal punto fisso.

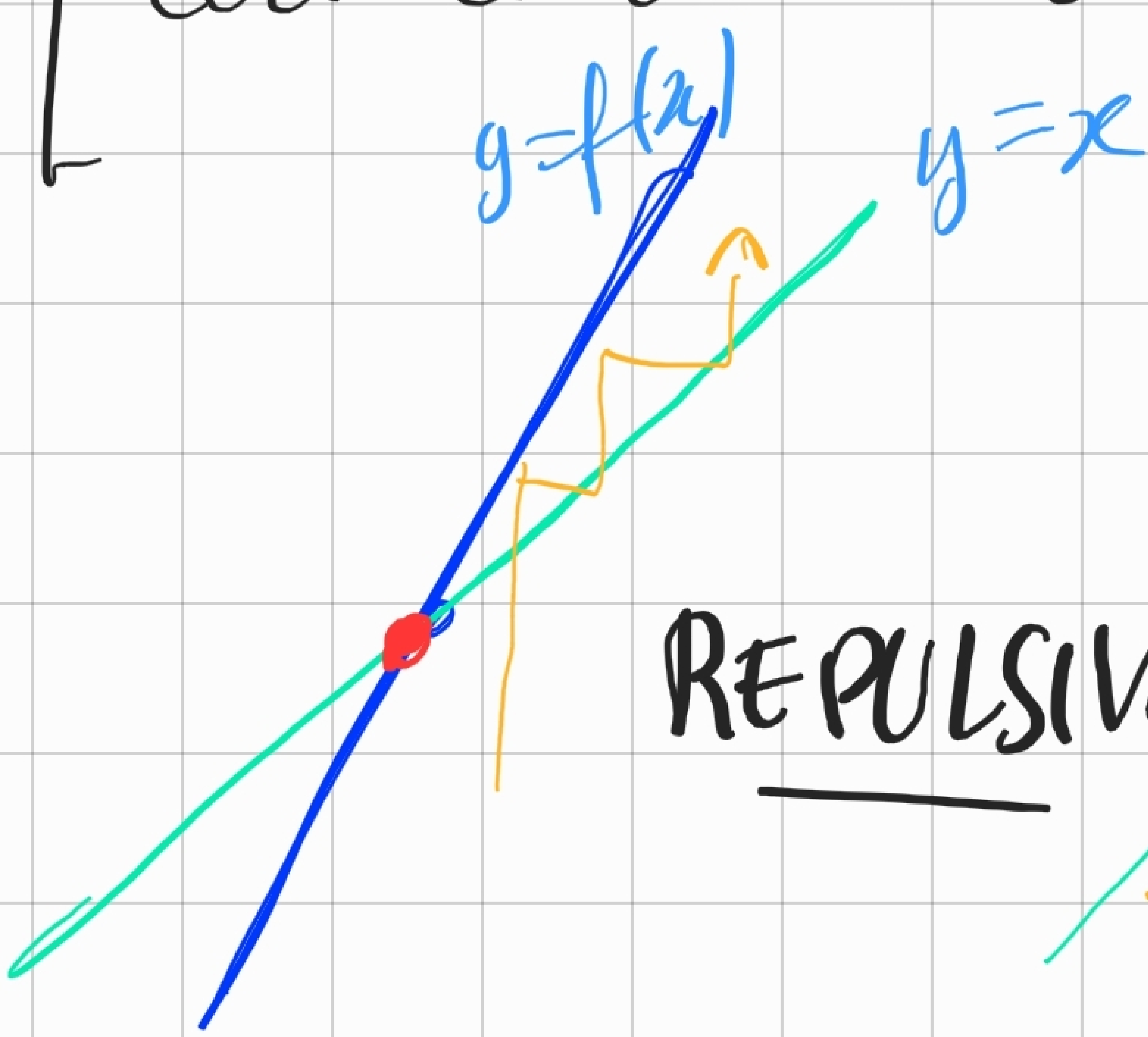
a_{n+1} è più lontano da -2 di quanto fosse a_n

se $a_n \in [-2, 1)$.

a_n non può convergere a -2

Idea: se la pendenza del grafico di f è maggiore di 1, il punto fisso è repulsivo.
(se è minore di 1 è attrattivo) $f(x_0)=x_0$

[con le derivate $\left|f'(x_0)\right| \begin{matrix} >1 \\ <1 \end{matrix}$]



REPULSIVO

Se $\forall n \; a_n \neq -2$ allora a_n non converge a -2.

Quali sono i punti che vanno in -2?

$$A = \{\alpha : \text{t.c. } \exists n : a_n = -2\}$$
$$= \{-2, 2, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0 \ldots\}$$

(A si addensa in $[-2,2]$)

$\alpha \overset{?}{\in} A$ $\boxed{f^n(\alpha)} \notin A$

No $\alpha \in \mathbb{Q}$

$f(\alpha)$

$f(x) = 2 - x^2$

$2 - x^2 = \sqrt{2}$ $2 - x^2 = -\sqrt{2}$

$x^2 = 2 - \sqrt{2}$

$x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$?

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è invariante per f.

$\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow f^n(\alpha) \in \mathbb{Q} \ \forall n.$

se fosse $f^n(\alpha) = -2$

$$f^{n-1}(\alpha) \in \{-2, 2\}$$

$$f^{(n-2)}(\alpha) \in \{-2, 2, \pm\sqrt{2}\}$$
