

# Analisi Matematica

## Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

20 febbraio 2021

- (a) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in  $x_0 = 0$  per la funzione  $\arctg(1+x)$   
(b) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2} \sin(\arctg(\cos(2x)))}{(e^x + e^{-x})^5 - 32 - 80x^2}.$$

*Soluzione.* Calcoliamo le derivate della funzione  $f(x) = \arctg(1+x)$ :

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2(1+x)}{(1+(1+x)^2)^2}$$

e determiniamo il polinomio di Taylor tramite la definizione:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

Per calcolare il limite consideriamo i seguenti sviluppi di Taylor per  $x \rightarrow 0$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$\begin{aligned} \arctg \cos 2x &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left( -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \right) - \frac{1}{4} (-2x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) \\ &= \frac{\pi}{4} - x^2 + \frac{x^4}{3} - x^4 + o(x^4) = \frac{\pi}{4} - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \sin \arctg \cos 2x &= \sin \left( \frac{\pi}{4} - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos(x^2 + o(x^2)) - \cos \frac{\pi}{4} \sin \left( x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - x^2 - \frac{7}{6}x^4 + o(x^4) \right]. \end{aligned}$$

Ancora

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{2}x) &= 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2 + \frac{1}{24}(\sqrt{2}x)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

L'espressione a numeratore è dunque

$$\begin{aligned}N(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[ 1 - x^2 - \frac{7}{6}x^4 \right] + o(x^4) \\ &= \frac{4}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Per il denominatore  $D(x)$  ricordiamo che vale

$$(1+y)^5 = 1 + 5y + \binom{5}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + 5y + 10y^2 + o(y^2)$$

e dunque

$$\begin{aligned}(e^x + e^{-x})^5 &= \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^5 \\ &= \left( 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \right)^5 = 2^5 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^5 \\ &= 2^5 \left( 1 + 5 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + 10 \left( \frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \right) \\ &= 2^5 \left( 1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{5}{2}x^4 + o(x^4) \right) \\ &= 32 + 80x^2 + \frac{65 \cdot 4}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$D(x) = \frac{65 \cdot 4}{3}x^4 + o(x^4)$$

e infine

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{65 \cdot 4}{3}x^4 + o(x^4)} \rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{65 \cdot 4} = \frac{1}{65}.$$

□

2.1) Si considerino le funzioni:

$$f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^4}, \quad g(x) = x^4 - 4x - 3.$$

(a) Quante soluzioni ha l'equazione  $g(x) = 0$ ?

(b) Quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = \frac{9}{10}$ ?

(c) Quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = \frac{-3}{10}$ ?

(d) Quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = \frac{11}{10}$ ?

*Soluzione.* Svolgendo la derivata

$$g'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

si deduce che per  $x < 1$  si ha  $g'(x) < 0$  e quindi  $g$  è strettamente decrescente sull'intervallo  $(-\infty, 1]$  mentre per  $x > 1$  risulta  $g'(x) > 0$  e quindi  $g$  è strettamente crescente sull'intervallo  $[1, +\infty)$ . Dunque  $x = 1$  è un punto di minimo globale (stretto) per  $g$ . Per  $x = 1$  si ha  $g(1) = -6 < 0$  mentre per  $x \rightarrow \pm\infty$  si ha chiaramente  $g(x) \rightarrow +\infty$  dunque, per il teorema dei valori intermedi, la funzione  $g$  deve annullarsi almeno una volta nell'intervallo  $(-\infty, 1]$  e almeno una volta nell'intervallo  $[1, +\infty)$ . Essendo strettamente monotona su ognuno dei due intervalli, la funzione non può annullarsi più di un volta. Dunque esistono due soli punti  $x_1 < 1 < x_2$  tali che  $g(x_1) = 0$  e  $g(x_2) = 0$ . Visto che  $g(0) = -3$ ,  $g(-1) > 0$ ,  $g(2) > 0$  dalla monotonia di  $g$  deduciamo che deve essere:  $-1 < x_1 < 0 < 1 < x_2 < 2$ .

Cerchiamo ora di determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x)$ . Osserviamo che  $f(x) = 0$  se e solo se  $x = 1$ . Osserviamo che  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Determiniamo la derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3x^2(1+x^4) - (1-x^3)4x^3}{(1+x^4)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 3x^6 - 4x^3 + 4x^6}{(1+x^4)^2} \\ &= x^2 \frac{x^4 - 4x - 3}{(1+x^4)^2} = \frac{x^2 g(x)}{(1+x^4)^2}. \end{aligned}$$

Dunque la derivata  $f'(x)$  si annulla per  $x = 0$  e per  $x \neq 0$  ha lo stesso segno della funzione  $g(x)$ . Dunque  $f$  è strettamente crescente sull'intervallo  $(-\infty, x_1]$ , strettamente decrescente sull'intervallo  $[x_1, x_2]$  e strettamente crescente sull'intervallo  $[x_2, +\infty)$ .

Visto che  $f(0) = 1$  e  $f(1) = 0$  dovrà essere  $f(x_1) > 1 > \frac{9}{10}$  e  $f(x_2) < 0 < \frac{9}{10}$ . Dunque nell'intervallo  $[x_1, x_2]$  la funzione  $f$  assume esattamente una volta il valore  $\frac{9}{10}$  (per stretta monotonia e continuità). Anche nell'intervallo  $(-\infty, x_1]$  il valore viene assunto esattamente una volta (in quanto il limite a  $-\infty$  è inferiore a  $\frac{9}{10}$ ). Nell'intervallo  $(x_2, +\infty)$  la funzione è invece sempre negativa, in quanto è crescente ed ha limite 0 per  $x \rightarrow +\infty$ . Dunque l'equazione  $f(x) = \frac{9}{10}$  ha 2 soluzioni.

Il valore  $-\frac{3}{10}$  può essere assunto solamente nell'intervallo  $(x_2, +\infty)$  in quanto negli altri due intervalli la funzione è  $\geq 0$ . Visto che  $f(2) = \frac{-7}{17} < \frac{-3}{10}$  dovrà essere  $f(x_2) \leq f(2) < -\frac{3}{10}$ . Significa che  $-\frac{3}{10}$  è un valore assunto una volta nell'intervallo  $(1, x_2)$  e una volta nell'intervallo  $(x_2, +\infty)$ . Dunque l'equazione  $f(x) = -\frac{3}{10}$  ha 2 soluzioni.

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = \frac{11}{10}$  è molto più complicato. Vorremmo sapere se  $f(x_1)$  è più grande o più piccolo di  $\frac{11}{10}$ . Ricordiamo che  $x_1 \in (-1, 0)$  è una soluzione dell'equazione  $g(x) = 0$  e dunque risulta

$$x_1^4 = 4x_1 + 3.$$

Potremo usare la relazione precedente per semplificare le potenze di  $x_1$ . Proviamo allora a calcolare  $f(x_1)$ :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1 - x_1^3}{1 + x_1^4} = \frac{1 - x_1^3}{1 + 4x_1 + 3} = \frac{1 - x_1^3}{4x_1 + 4} \\ &= \frac{x_1 - x_1^4}{4x_1^2 + 4x_1} = \frac{x_1 - 4x_1 - 3}{4x_1^2 + 4x_1} = \frac{-3x_1 - 3}{4x_1^2 + 4x_1}. \end{aligned}$$

Proviamo a risolvere la disequazione

$$f(x_1) \stackrel{?}{<} \frac{11}{10}.$$

L'equazione diventa

$$\frac{-3x_1 - 3}{4x_1^2 + 4x_1} \stackrel{?}{<} \frac{11}{10}$$

e osservando che il denominatore  $4x_1^2 + 4x_1 = 4x_1(x_1 + 1) < 0$  in quanto  $-1 < x_1 < 0$ , la disequazione risulta equivalente a

$$-3(x_1 + 1) \cdot 10 \stackrel{?}{>} 11(4x_1^2 + 4x_1)$$

che diventa una disequazione di secondo grado:

$$22x_1^2 + 37x_1 + 15 \stackrel{?}{<} 0.$$

Il discriminante è  $\Delta = 37^2 - 4 \cdot 15 \cdot 22 = 1369 - 1320 = 49$ . Dunque la disequazione è soddisfatta se

$$\frac{-37 - 7}{44} < x_1 < \frac{-37 + 7}{44}$$

ovvero

$$-1 < x_1 < -\frac{15}{22}.$$

La prima disequazione sappiamo già essere verificata. Ci chiediamo quindi se vale la seconda:

$$x_1 \stackrel{?}{<} -\frac{15}{22}.$$

Per deciderlo “basta” trovare il segno di  $g(-15/22)$ :

$$\begin{aligned} g(-15/22) &= \frac{15^4}{22^4} + \frac{60}{22} - 3 = \frac{15^4 + 60 \cdot 22^3 - 3 \cdot 22^4}{22^4} \\ &= \frac{15^4 + 22^3(60 - 66)}{22^4} = \frac{15^4 - 6 \cdot 22^3}{22^4}. \end{aligned}$$

Con molta pazienza possiamo calcolare  $15^4 = (225)^2 = 50625$  e  $6 \cdot 22^3 = 6 \cdot 484 \cdot 22 = 6 \cdot 10648 = 63888$ .

Dunque  $g(-15/22) < 0$  da cui  $x_1 < -\frac{15}{22}$  da cui  $f(x_1) < \frac{11}{10}$ .

Visto che  $f(x_1)$  è il valore massimo assunto dalla funzione  $f$  significa che l'equazione  $f(x) = \frac{11}{10}$  non ha soluzione.  $\square$

3.1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \cos x + \ln(1 - \sin x) - e^{-x} + \frac{3}{2} \operatorname{tg}(x^2 + x^4).$$

- Dire se il punto  $x_0 = 0$  è un punto di massimo locale o di minimo locale per  $f$ .
- Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in  $x_0 = 0$  per la funzione derivata  $f'(x)$ .
- Posto  $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$  dimostrare che esiste  $n_0$  per cui  $a_n > 0$  per  $n \geq n_0$ . Si consideri, al variare di  $\alpha$  la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha.$$

Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$ , c'è convergenza assoluta

- e per quali  $\alpha$  c'è convergenza semplice.

*Soluzione.* Ricordando che per  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \ln(1 + y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^3) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\ \sin^2 x &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\ \sin^3 x &= (x + o(x^2))^3 = x^3 + o(x^4) \\ \sin^4 x &= x^4 + o(x^4) \\ \operatorname{tg} y &= y + o(y^2) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \ln(1 - \sin x) &= -\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}. \end{aligned}$$

Possiamo sviluppare la funzione  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) \\ &\quad - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{3}{2}(x^2 + x^4) + o(x^4) \\ &= \frac{17}{12}x^4 + o(x^4) = x^4 \left(\frac{17}{12} + o(1)\right). \end{aligned}$$

Visto che  $f(0) = 0$  e visto che per la permanenza del segno in un intorno di zero si ha  $\frac{17}{12} + o(1) > 0$ , deduciamo che  $x_0 = 0$  è un punto di minimo locale per  $f$ .

Per l'unicità del polinomio di Taylor nella formula di Peano, sappiamo che il polinomio  $\frac{17}{12}x^4$  è il polinomio di Taylor di ordine 4 per  $f$  centrato in  $x_0 = 0$ . Sappiamo inoltre che il polinomio di ordine 3 di  $f'$  è la derivata del polinomio di ordine 4 di  $f$  e dunque è  $\frac{17}{3}x^3$ .

Visto che  $x_0 = 0$  è un minimo locale per  $f$  esiste  $\varepsilon > 0$  per cui  $f(x) > 0$  se  $x \in (0, \varepsilon)$ . Significa allora che  $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$  se  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Basterà quindi scegliere  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Per  $n \rightarrow +\infty$ , ponendo  $x = \frac{1}{n}$  nello sviluppo di  $f(x)$  troviamo

$$(a_n)^\alpha = \left(\frac{17}{12n^4} + o(n^{-4})\right)^\alpha = \frac{17^\alpha}{12^\alpha n^{4\alpha}} + o(n^{-4\alpha}) \sim \frac{17^\alpha}{12^\alpha n^{4\alpha}}.$$

Dunque la serie  $\sum a_n^\alpha$  ha lo stesso carattere della serie  $\sum \frac{1}{n^{4\alpha}}$  che è convergente se e solo se  $4\alpha > 1$ . Concludiamo che la serie è assolutamente convergente se e solo se  $\alpha > \frac{1}{4}$ .

Se  $\alpha \leq 0$  osserviamo che, per confronto asintotico,  $a_n^\alpha$  non è infinitesima e quindi neanche  $(-1)^n a_n^\alpha$  è infinitesima: significa che la serie non può convergere.

Se  $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$  possiamo dimostrare che la serie è convergente grazie al criterio di Leibniz. La successione  $a_n$  è infinitesima e dunque anche  $a_n^\alpha$  lo è. Inoltre sappiamo che per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$f'(x) = x^3 \left(\frac{17}{3} + o(1)\right)$$

e visto che l'espressione tra parentesi tonde è positiva in un intorno di  $x = 0$  (per la permanenza del segno) allora la funzione  $f'(x)$  è positiva in un intorno destro di  $x = 0$ . Significa che  $f(x)$  è crescente in tale intorno e dunque  $a_n = f(1/n)$  è decrescente in un intorno di  $+\infty$ . Si applica quindi il criterio di Leibniz.  $\square$