Compito 2021/09/10 ex 1

venerdì 10 settembre 2021 15:41

Per quali α, β, γ reali e positivi converge

$$\sum \left(\left(n^3 + (\ln n)^\alpha - \operatorname{arctg} n\right) \sin \frac{\pi}{n^\beta} \right) \Big/ e^{\frac{2}{n}} (\ln n)^\gamma$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi. Inoltre

$$\frac{n^3 + (\ln n)^\alpha - \operatorname{arctg} n}{n^3} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

quindi $\exists\, \bar{n} : n \geq \bar{n}$

$$\frac{1}{2} n^3 \leq n^3 + (\ln n)^\alpha - \operatorname{arctg} n \leq 2 n^3$$

Inoltre

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi \quad ; \quad e^{\frac{2}{n}} \to 1$$

In conclusione la serie data converge $\Leftrightarrow$ converge

$$\sum n^3 \frac{1}{n^\beta} \frac{1}{(\ln n)^\gamma}$$

cioè $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \beta > 4, & \forall \gamma \\ \beta = 4 & \gamma > 1 \end{cases}$$

o

Compito 2021/09/10 ex 2

venerdì 10 settembre 2021 15:52

Risoluzione

1) $u' + 2xu = x$

2) $u' + 2xu = 0 \qquad \frac{u'}{u} = -2x \qquad u(x) = C e^{-x^2}, \; C \in \mathbb{R}$

Cerchiamo una sol. di 1 della forma

$$u(x) = C(x) e^{-x^2}$$

$$u'(x) = C'(x) e^{-x^2} - 2x\, C(x) e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow u' + 2xu = C' e^{-x^2} - 2x\, C(x) e^{-x^2} + 2x\, C(x) e^{-x^2} = x$$

$$\Rightarrow C' = x e^{x^2} \quad \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

In conclusione

$$u(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} e^{-x^2} + C e^{-x^2} = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Allora

1) $\forall$ u soluzione: $u(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2}$: $\nexists\, u_0$ dato iniziale tale che $u(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

2) L'unica soluzione costante deve essere $\bar{u}(x) \equiv \frac{1}{2}$:

$\bar{u}$ è soluzione del pb. di Cauchy con dato

$u(0) = u_0 = \frac{1}{2}$

Compito 2021/09/10 ex 3

venerdì 10 settembre 2021 16:04

Per quali α e $\beta \in \mathbb{R}$ converge

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)^\beta x^\alpha}\, dx$$

Osserviamo che ci sono problemi solo per $x \sim 0$ e $x \sim \infty$

$$\frac{\operatorname{arctg} t}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1 \qquad \operatorname{arctg} t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)^\beta x^\alpha} \sim x^{1/2 - \alpha} \quad \text{per } x \to 0+$$

$$\sim \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$\Rightarrow I \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} < 1 : \quad \alpha < 3/2 \\ \alpha + \beta > 1 \end{cases}$$

Tra cui $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$

Calcoliamo I:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$$

Poniamo $\quad \operatorname{arctg} \sqrt{x} = y$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dy$$

-/ $\frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dy$

$$I = \int_0^{\pi/2} 2y \, dy = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2$$