ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 31 - 1.12.2021

Es successioni per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

è ben definita?

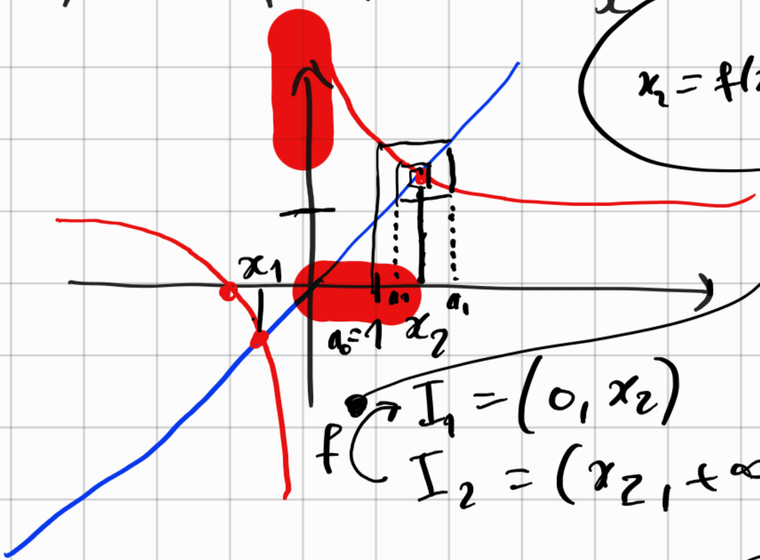
$a_{n+1} = f(a_n)$ $\qquad f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$0 < x < x_2$

$x_2 = f(x_2) < f(x)$

$x > x_2$

$f(x) < f(x_2)$
$\quad \parallel$
$\quad x_2$



$f \curvearrowright I_1 = (0, x_2)$

$I_2 = (x_2, +\infty)$

f

$a_0 \in I_1$
$\Downarrow$
$a_{2n} \in I_1$
$a_{2n+1} \in I_2$
$\forall n.$

punti fissi: $\quad f(x) = x \qquad x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$I = (0, +\infty)$ è invariante

$$x > 0 \implies f(x) = 1 + \frac{1}{x} > 1 > 0$$

$$f : I \longrightarrow I$$

$a_0 \in I \implies a_n$ è ben definita, $a_n > 0 \quad \forall n.$

Su I f è decrescente

$\Downarrow$

a_{2n}, a_{2n+1} sono monotone.

$a_{2n} \to \ell_1$ $\qquad$ $a_{2n+2} = f(f(a_{2n}))$

$a_{2n+1} \to \ell_2$ $\qquad$ $a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1}))$

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+2} & = & f(f(a_{2n})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell_1 & & f(f(\ell_1)) \end{array}$$

ℓ_1 punto fisso di $f \circ f$.

lo stesso vale per ℓ_2.

$$\begin{cases} a_{2n+2} = 1 + \dfrac{1}{a_{2n+1}} \\[2ex] a_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_{2n}} \end{cases}$$

passando al limite per $n \to +\infty$

$$\begin{cases} \ell_1 = 1 + \dfrac{1}{\ell_2} \\[2ex] \ell_2 = 1 + \dfrac{1}{\ell_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_1 = f(\ell_2) \\ \ell_2 = f(\ell_1) \end{cases}$$

$$\ell_1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ell_1}} = f(f(\ell_1)).$$

Chi sono i punti fissi di $f \circ f$?

(OSS se x è punto fisso di f
allora x è punto fisso di $f \circ f$)

x_1 e x_2 sono punti fissi di $f \circ f$.

$f(f(x)) = x \qquad 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = x$

$1 + \dfrac{x}{x+1} = x$

$\dfrac{x+1+x}{x+1} = x \qquad 2x+1 = x(x+1)$

$2x+1 = x^2+x \qquad x^2 = x+1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

$l_1, l_2 \in [0, +\infty] \not\ni x_1$

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 + \dfrac{1}{a_0} = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$

$a_2 = 1 + \dfrac{1}{a_1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \qquad a_3 = \dots\dots$

$a_0 < a_2 \Rightarrow a_{2n}$ è crescente

$\Downarrow$

a_{2n+1} è decrescente $\qquad a_{2n+1} \to l_2$

$l_2 \leq a_1 < +\infty$

$a_{2n} \overset{?}{\leq} x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$l_2 = x_2 \qquad l_2 \neq +\infty$

$a_{2n} \in I_1 = (0, x_2)$ $\quad$ $\ell_1 \in [0, x_2]$ $\quad$ $\ell_1 \neq +\infty$

$$\ell_1 = x_1$$

$$\ell_1 = \ell_2 = x_1$$

$$a_n \to x_1$$

$$\begin{cases} a_{2n} \to \ell_1 \\ a_{2n+1} \to \ell_2 \end{cases}$$

In alternativa:
se fosse:
$\ell_1 = +\infty$

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+1} & = & 1 + \dfrac{1}{a_{2n}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell_2 & = & 1 \end{array}$$ assurdo perché

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+2} & = & 1 + \dfrac{1}{a_{2n+1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & \neq & 2 \end{array}$$ assurdo

Lo stesso vale se $\ell_2 = +\infty \Rightarrow \ell_1 = 1 \Rightarrow \ell_2 = 2$
assurdo. $\square$

Nota

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$$
$$= g(a_n)$$

$$g(x) = f(x) - x$$

è l'analogo discreto dell'equazione diff. $\quad a'(t) = f(a(t)) - a(t) = g(a(t)).$

Curiosità:

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}\,\varphi^n}} \to 0 \qquad \boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

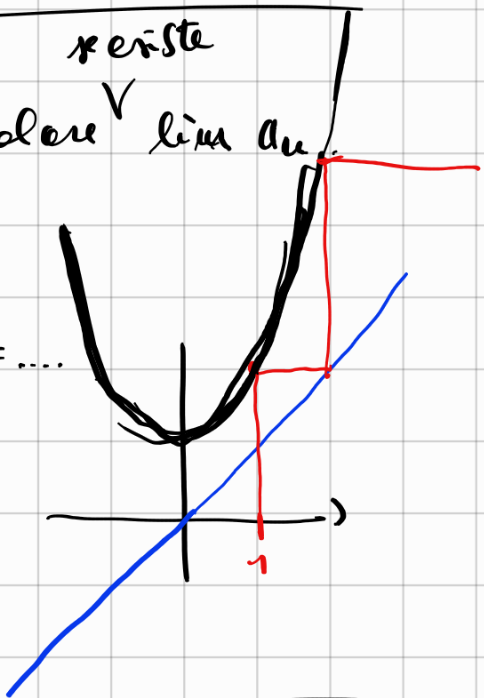
F_n: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$$

Esercizio

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_n^2 \end{cases}$$

calcolare (se esiste) $\lim a_n$



$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 26$, $a_4 = \dots$

a_n è crescente $\Uparrow$

$f(x) > x$

$f(x) = 1 + x^2$

$\Downarrow$

$a_{n+1} > a_n$

$a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$a_{n+1} = 1 + a_n^2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\ell = 1 + \ell^2$$

se $\ell \in \mathbb{R}$

$\ell^2 - \ell + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 < 0$

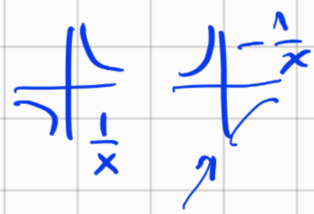
$\ell \notin \mathbb{R}$ $\quad \ell = +\infty \quad$ D

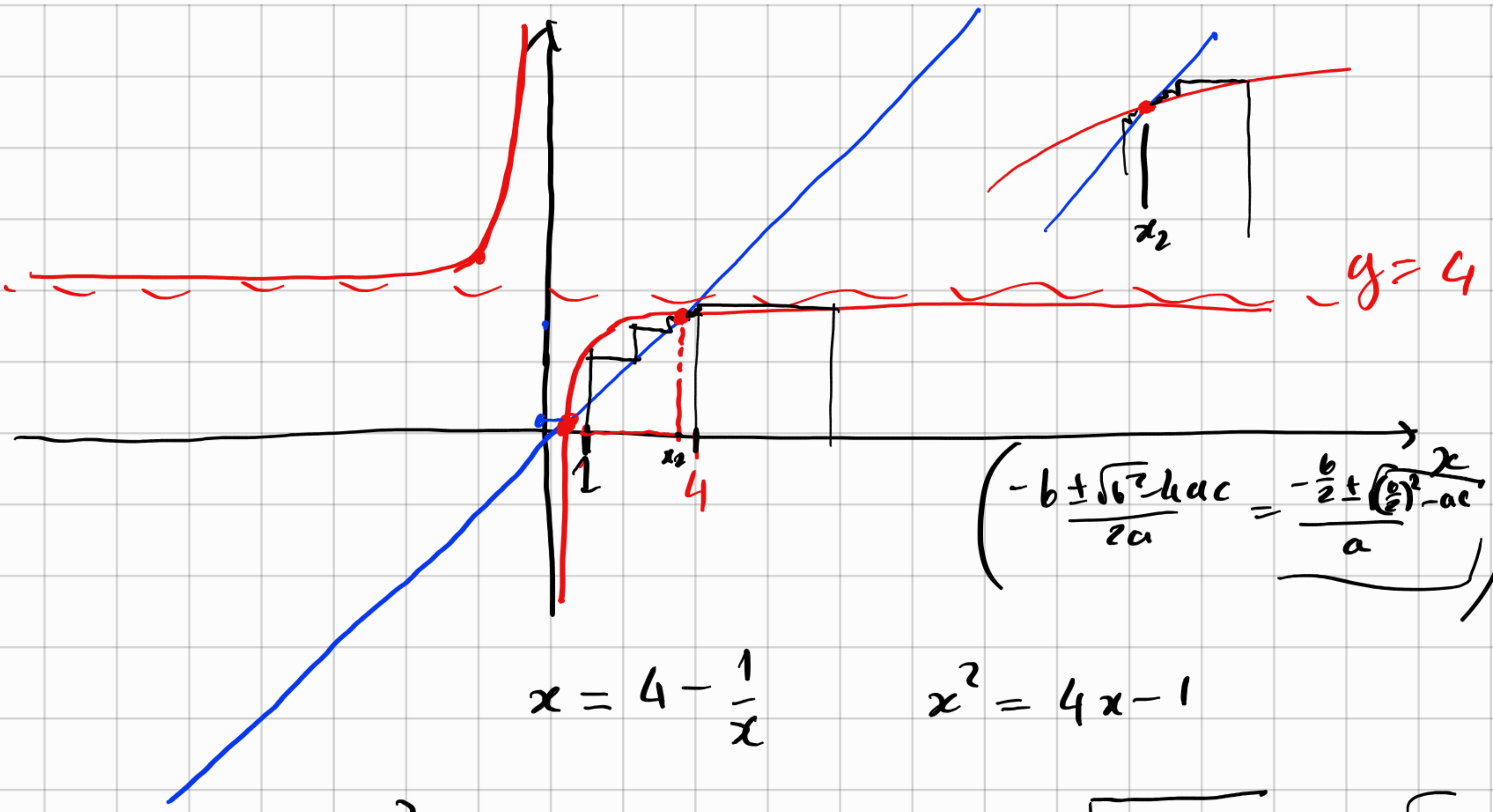
Esercizio

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

$a_{n+1} = f(a_n)$

$f(x) = 4 - \frac{1}{x}$





$$\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}\right)$$

$$x = 4 - \frac{1}{x} \qquad x^2 = 4x - 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad x_{12} = 2 \mp \sqrt{4-1} = 2 \mp \sqrt{3}$$

$x_1 = 2 - \sqrt{3}$

$x_2 = 2 + \sqrt{3}$

$\left(2+\sqrt{3} < 4 \Leftarrow \sqrt{3} < 2 \right.$ ✓

$I = (x_1, x_2)$ è invariante

$0 < x_1 < x < x_2$

$f(x_1) < f(x) < f(x_2)$

$\underset{\text{strett.}}{f(x)} = 4 - \frac{1}{x}$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$x \in I \Rightarrow f(x) \in I$$

$1 \overset{?}{\in} I$ Sì

$2-\sqrt{3} \overset{?}{<} 1 \overset{?}{<} 2+\sqrt{3}$ Sì

$\sqrt{3} > 1$ $\quad$ $\sqrt{3} > -1$ ✓ ok

$a_n \in I \ \forall n$

$f(x)$ è crescente su I

$f(x) > x$ su I

$a_{n+1} = f(a_n) > a_n$

a_n è strett. crescente su I

$a_n \to \ell \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

a_n crescente $\quad \ell \geq a_0 = 1$

$\ell \in [1, 2+\sqrt{3}]$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & 4 - \frac{1}{a_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & 4 - \frac{1}{\ell} \end{array}$$

$\ell^2 = 4\ell - 1$

$\ell \in \{\ell_1, \ell_2\}$

$\ell_1 < 1$ la escludo

$\Rightarrow \ell = \ell_2$. $\square$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2+\sqrt{3}$

($a_0 = 1 \in \mathbb{Q}$ $\quad a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}$ $\quad \mathbb{Q}$ è invariante

$a_n \in \mathbb{Q}$ $\quad a_n \to 2+\sqrt{3}$)

$f(x) = 4 - \frac{1}{x} = 0$

$x = \frac{1}{4}$

$a_0 \neq \frac{1}{4}$

$4 - \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

$\boxed{f(x) < x}$

$a_{n+1} = f(a_n) < a_n$

$\boxed{1}$ ES $\quad J = \left(0, \frac{1}{4}\right) \quad \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \end{cases} \quad \alpha \in J$

dimostrare che $a_n \to 2+\sqrt{3}$

$$J \xrightarrow{f} (-\infty, 0) \to (2+\sqrt{3}, +\infty)$$

$a_n \to 2+\sqrt{3}$

Cosa succede se $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, 2-\sqrt{3}\right)$?

Per quali α la succ. non è ben definita?