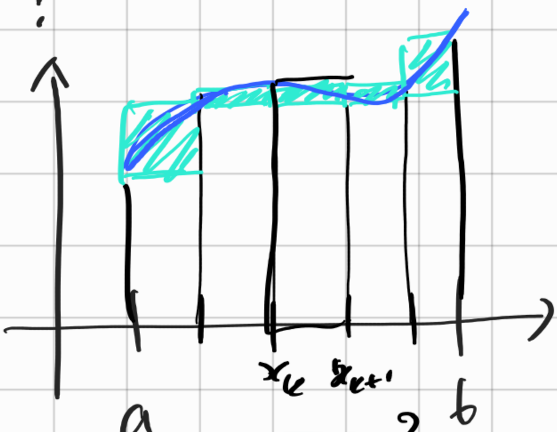
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 60 — 25.2.2022

f continua $\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$\Downarrow$

f è R-integrabile ?



dim (supponiamo f unif. cont)

f è R-integrabile

$\Updownarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P:\ \boxed{S^*(f,P)-S_*(f,P)} \overset{?}{<} \varepsilon\cdot(b-a)$$

f è continua.

$$\circledast = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\Big[\underbrace{\overset{\max}{\cancel{\sup}}_{[x_k,x_{k+1}]} f - \overset{\min}{\cancel{\inf}}_{[x_k,x_{k+1}]} f}\Big]^{<\varepsilon}$$

$P=\{x_0,\dots,x_n\} \qquad a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

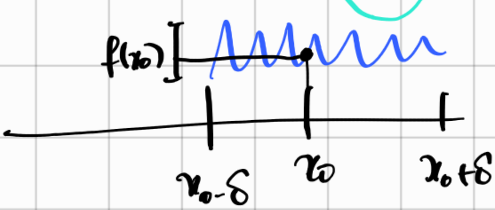
se fosse $\boxed{\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f < 2\varepsilon}$

allora

$$\circledast \le 2\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = 2\varepsilon\cdot(b-a)$$

f continua in $x_0\in A \qquad f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in A:\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$



$$\sup_{|x-x_0|<\delta} f - \inf_{|x-x_0|<\delta} f \le 2\cdot\varepsilon$$

Problema δ dipende dal punto x_0.

Def diremo che $f: A \to \mathbb{R}$ è <u>uniformemente continua</u> se:

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in A : \forall x \in A : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Memo: $f: A \to \mathbb{R}$ è <u>continua</u>:

- $\forall y \in A : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in A : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

[Abbiamo mostrato che se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua allora f è R-integrabile.]

f unif. continua $\Rightarrow$ f continua.

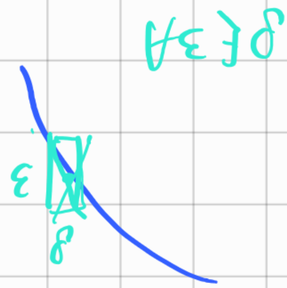
$$\underbrace{\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall y}\; \forall x \quad \longrightarrow \quad \forall y \; \forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall x$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \; \underbrace{\forall y \; \exists \delta} \; \forall x$$

Esempio $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

non è unif. continua.



$$? \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \overset{\forall x \forall y}{\vee}\; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \qquad (*)$$

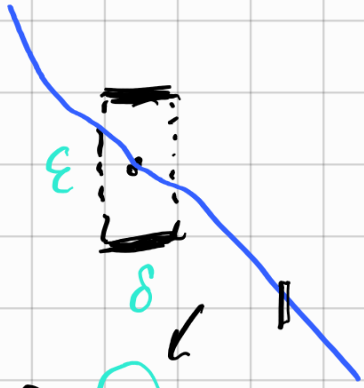
Prendiamo, per esempio, $\varepsilon = 1$, supponiamo per assurdo che esista $\delta > 0$ tale che vale $(*)$.

$$\underbrace{x, \quad y = x + \frac{\delta}{2}}$$

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\frac{\delta}{2}}\right| = \frac{\cancel{x}+\delta/2-\cancel{x}}{x\left(x+\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\frac{\delta}{2}}{x\cdot\left(x+\frac{\delta}{2}\right)} \to +\infty$$

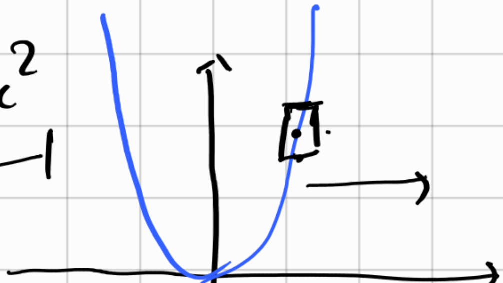
per $x \to 0$

Idea:



$\delta \mapsto \varepsilon$ è il modulo di continuità.

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$



non è uniformemente continua.

$$|f(x) - f(x+\tfrac{\delta}{2})| = |x^2 - (x+\tfrac{\delta}{2})^2|$$

$x > 0$

$$y = x+\frac{\delta}{2} \qquad = \cancel{x^2} + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - \cancel{x^2} \longrightarrow +\infty$$

per $x \to +\infty$.

Teorema (Heine-Cantor) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora è uniformemente continua.

dim Per assurdo:

$\to \neg\, \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ \forall y : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\to \exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x \overset{\in [a,b]}{\ } \exists y : |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|>\varepsilon$

$\exists \varepsilon>0 : \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n, y_n \in [a,b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon.$

$\delta = \frac{1}{n}$

B-W : $\exists\, x_{n_k}$ t.c. $x_{n_k} \to x$, $x \in [a,b]$

$$|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$$

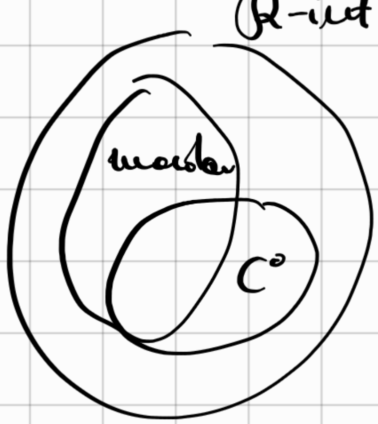
f è continua in x.

$$y_{n_k} \to x$$

$$\underbrace{|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|}_{\geq\, \varepsilon} \to |f(x) - f(x)| = 0$$

ASSURDO $\square$

<u>Teorema</u> Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona allora f è limitata e R-integrabile

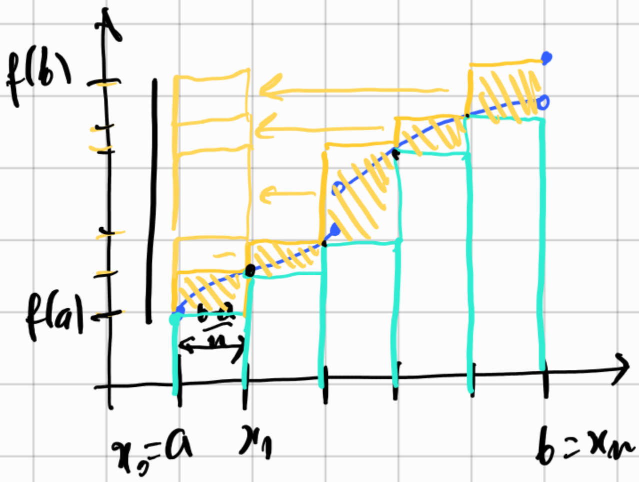


<u>dim</u> sia f crescente.

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

f è limitata.

$$P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$



$$\underbrace{S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n)}_{} \overset{?}{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} 0$$

$$\| \quad \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\downarrow \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$0$$

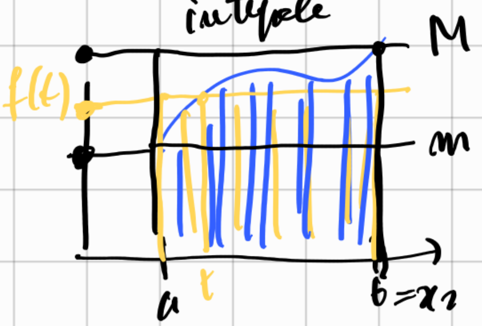
$\square$

Teorema (media integrale). Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.

Allora $\exists\, t\in[a,b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x)\,dx =: \frac{\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}}{b-a} = f(t)$$

↑ media integrale



$= f(t)\cdot(b-a).$

$\int$

dim f per W. ha max M e min. m

$$m \le f(x) \le M$$

$$(b-a)\cdot m = \int_a^b m \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M = (b-a)\cdot M$$

$$f(x_1) = m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M = f(x_2)$$

↳ è un valore intermedio

f continua, in un intervallo assume tutti i valori intermedi $\exists\, t\in[a,b]: f(t) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$ □

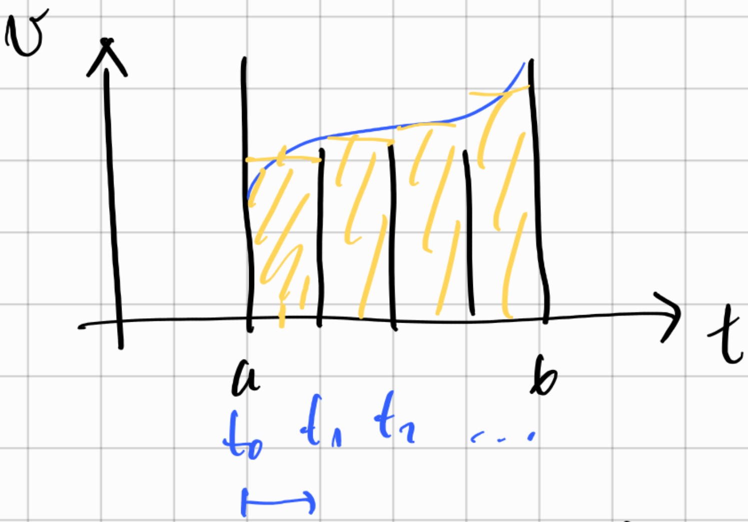
Esempio

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx = f(0) \qquad f \text{ continua.}$$

$\varepsilon>0$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx = f(t_\varepsilon) \qquad 0\le t_\varepsilon\le\varepsilon$$

$$f(t_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(0) \qquad t_\varepsilon \to 0$$



Oss

$$\frac{\int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx - \overbrace{\int_0^0 f(x)\,dx}^{0}}{\varepsilon}$$

Teo [Torricelli-Barrow / fondamentale del calcolo]

Sia $f: I\to\mathbb{R}$ continua, I intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$, sia $x_0\in I$.

Allora posto
$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$\left[F: I\to\mathbb{R}. \qquad f:[x_0,x]\to\mathbb{R} \text{ è continua} \right]$

F è derivabile e $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in I$.

Formula Fondamentale:

✓

Se $G : I \to \mathbb{R}$ è tale che $G'(x) = f(x)$.

Allora $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Def Se $G' = f$ diremo che G è una primitiva di f.