ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 70 - 23.3.2022

ES

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x}{\ln t}\, dt \qquad F:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$$

Calcolare $F'(x)$.

$$\left[F(x) = \Big[G(x,t) \Big]_{t=\frac{1}{x}}^{x} \qquad \text{dove } \frac{dG}{dt} = \frac{x}{\ln t} \right]$$

$$F(x) = x \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt \qquad G(x) = \int \frac{1}{\ln x}\, dx$$

$$G'(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$F(x) = x \Big[G(t) \Big]_{t=\frac{1}{x}}^{x}$$

$$= x \cdot \left(G(x) - G\left(\tfrac{1}{x}\right) \right)$$

$$F'(x) = \underbrace{G(x) - G\left(\tfrac{1}{x}\right)} + x\left(G'(x) - G'\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= \int_{1/x}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt + x \cdot \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$F'(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt + \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x}$$

$$F''(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x}$$

$$= \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x^2 \ln x} + \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x}$$

$$= \frac{x^2 - 1 + x^3 - x}{x^2 \ln x}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

1. Sono equazioni funzionali (l'incognita è una funzione)

Come chiamiamo la funzione incognita:

1. $x(t)$
2. $y(x)$
3. $f(x)$
4. $u(x)$. ← scelgo questa
5. $u(t)$

$x : A \to B$
$t \mapsto x(t)$

- eq. integrale: $u(x) = \int_{x_0}^{x} t \cdot u(t)\, dt \quad \forall$
- eq. con ritardo: $u(x) = u(x-1) + x \quad \forall$
- eq. differenziali: $u''(x) = u(x) \quad \forall x$

$u'' = u$

$u : A \to B$
$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\boxed{B \subseteq \mathbb{R}^n}$

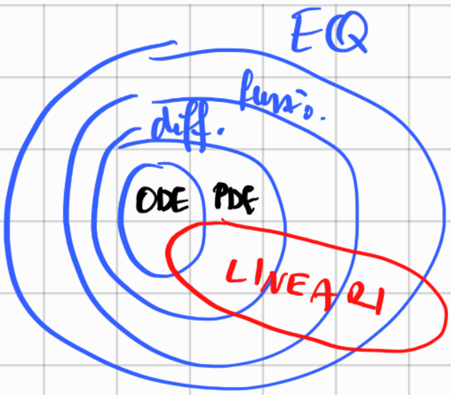
$\underline{m > 1}$ $\quad u = u(x,y)$ $\quad \boxed{\Delta u = p(x,y,z)}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = p(x,y,z)$$

Eq. diff. alle derivate parziali:
EDP PDE

Eq. diff. ordinaria: $m = 1$. $\quad u''(x) = (u'(x))^2 + 1$.
EDO ODE

- Caso più semplice: $u'(x) = f(x)$. $\quad u = \int f$.



Eq. lineari $\quad u \in V$

$$\boxed{L \cdot u = b}$$

spazi vettoriali

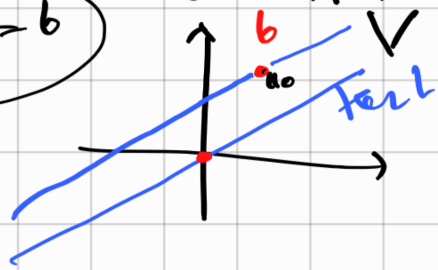
$$L : V \to W$$

$$b \in W$$

L lineare.

omogenee: $\quad Lu = 0 \quad u \in \ker L$

non omogenee: $\quad Lu = b \quad u \in L^{-1}(\{b\})$



$$u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Es: $\quad u'' = u \qquad u'' - u = 0$

$$(D^2 - I)u = 0$$ è omogenea

Se $\quad L(u_0) = b \quad$ e $\quad L(u) = 0$

$$L(u_0 + u) = L(u_0) + L(u) = b + 0 = b$$

Es $\quad F = ma \qquad a = u''$

$u(x)$ = posizione di una particella al tempo x

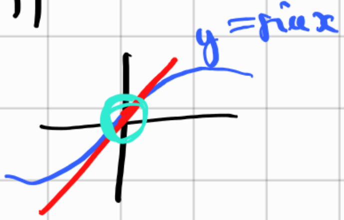
$$m \cdot u''(x) = F(x, u(x), u'(x))$$

Se F è lineare è una eq. differenziale lineare.

Es Eq del pendolo:

non è lineare

$$u''(x) = -\sin(u(x))$$



eq. linea rispetta; $u''(x) = -u(x)$

$m \cdot a'' = -ku$

L'analogo discreto sono le succ. definite per ricorrenza.

$u'(x) = u(x) + 1$

$n = x$ $\qquad u_{n+1} - u_n = u_n + 1$

$$\underbrace{u_{n+1} = 2u_n + 1}$$

METODI RISOLUTIVI

① $u'(x) = f(x)$ le soluzioni sono $u \in \int f$.

Es $u'(x) = \sin x$ $\qquad u(x) = \int \sin x \, dx$

$= -\cos x + c$

Tutte le soluzioni sono della forma

$u(x) = -\cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Teorema (di struttura). $\qquad L : V \to W$. (sp. vett.) $\qquad b \in W$

L lineare

(*) $Lu = b$ (eq. lineare non omogenea)

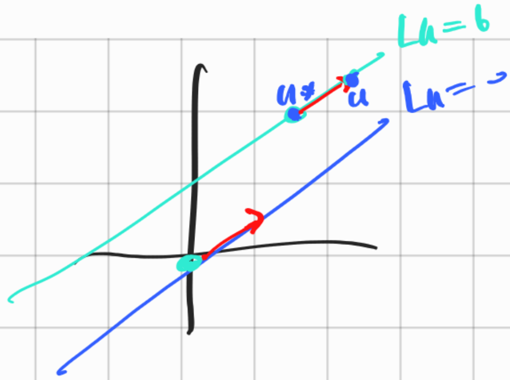
ogni soluzione di (*) si scrive nella forma

$u = u_* + u_0$ dove u_* è una sol. particolare di (*)

e u_0 è una sol. generica di (*)'

$$(**) \quad Lu = 0$$

$$L^{-1}(\{b\}) = u_* + \operatorname{Ker} L$$



② Eq. diff. lineari del I ordine (in forma normale/esplicita)

$$\boxed{u'(x) + a(x) \cdot u(x) = b(x).}$$

$$\left[\, u'(x) = m(x)u(x) + q(x) \,\right]$$ Forma normale

$$u' + a \cdot u = b$$ a, b funzioni $a = a(x)$, $b = b(x)$.

Eq. diff. di ordine n in forma normale:

$$\boxed{u^{(n)}(x) = F\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right)}$$

forma implicita $$\boxed{G\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) = 0}$$

Metodo risolutivo:

$$u'(x) + a(x) \cdot u(x) = b(x)$$

Fattore integrante: $e^{A(x)}$ dove $A(x) \in \int a(x)\,dx$

$$u'(x) \cdot e^{A(x)} + a(x) \cdot e^{A(x)} u(x) = b(x)\, e^{A(x)}$$

$$\left(u(x)\cdot e^{A(x)}\right)' = b(x)\, e^{A(x)}$$

$$u(x)\, e^{A(x)} = \int b(x)\, e^{A(x)}\, dx$$

$$u(x) = e^{-A(x)} \left[\int b(t)\, e^{A(t)}\, dt\right]_{t=x}$$

Esempio (autovalori dell'operatore D). $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u'(x) = \lambda u(x)$$

$$u'(x) - \lambda \cdot u(x) = 0$$

$$u'(x)\, e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} u(x) = 0$$

$$\left(u(x)\, e^{-\lambda x}\right)' = 0$$

$$u(x)\, e^{-\lambda x} = c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$$u(x) = c \cdot e^{\lambda x}$$

Esempio

$$u' - \frac{u}{x} = x^2$$

$$a(x) = -\frac{1}{x}$$

$$b(x) = x^2$$

$$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = x$$

$$\left(\frac{u}{x}\right)' = x$$

$$\frac{u}{x} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$u(x) = \frac{x^3}{2} + cx.$$