ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 25 - 18.11.2022

(convergenza alla Cesàro)

<u>Osservazione</u> $a_n = (-1)^n$ $\qquad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

a_n è indeterminata $\qquad b_n \to 0$

<u>Teo</u> 1. Se $a_n \to \ell$ allora $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \to \ell$.

<u>dim</u> Idea: $\forall q > \ell \quad \limsup b_n \leq q$

$\forall a < \ell \quad \liminf b_n \geq a$

Sia $\underline{q > \ell}$ ($<$) $\quad \underline{\exists N:}\ \forall n \geq N \quad a_n \leq q$ ($\geq$) $\qquad (a_n \to \ell)$

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} a_k \leq \frac{(n-N)\cdot q}{n} \ (\geq)$$

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} a_k \to 0$ per $n \to +\infty$

$$\begin{cases} \limsup b_n = \limsup\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} a_k\right) \leq q & \text{se } q > \ell \\ \liminf b_n = \liminf\left(\quad + \quad \right) \geq a & \text{se } a < \ell \end{cases}$$

$(\geq)$; $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} a_k \to 0$; $\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} a_k \leq \frac{(n-N)\cdot q}{n} \to q$

$\to 0$; $\geq \frac{n-N}{n}\cdot a \to a$

$$\begin{cases} \limsup b_n \leq \ell \\ \liminf b_n \geq \ell \end{cases} \implies \lim b_n = \ell \qquad \square.$$

2. $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \to \ell \qquad (a_n > 0)$

dim

$$\sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} = e^{\boxed{\frac{1}{n} \ln a_n}} \longrightarrow \ell \quad (*)$$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0$$

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{a_k}{a_{k-1}} + \ln a_0$$

$$\frac{1}{n} \ln a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln b_k + \underbrace{\frac{1}{n} \ln a_0}_{\to 0}$$

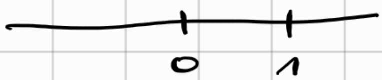
$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$ (1) ← punto 1 precedente

$\ln \ell \qquad\qquad \ln \ell$

□

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

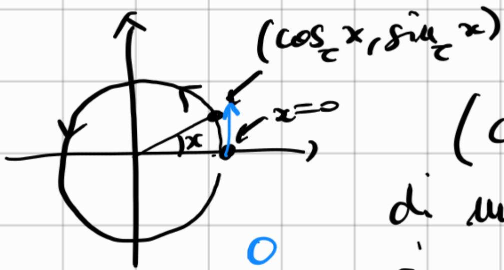
$\varphi : \mathbb{R} \to U \subseteq \mathbb{C}$



1-periodica.

$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Scelto $\tau > 0$ abbiamo definito $\begin{cases} \cos_\tau x = \mathrm{Re}\, \varphi\left(\frac{x}{\tau}\right) \\ \sin_\tau x = \mathrm{Im}\, \varphi\left(\frac{x}{\tau}\right) \end{cases}$



$(\cos_\tau x, \sin_\tau x)$ sono le coordinate di un punto che si muove di moto circolare uniforme su U = circonferenza unitaria.

$$V_{x=0} = \frac{\sqrt{\underbrace{(\cos_\tau x - 1)^2}_{\to 0} + \sin_\tau^2 x}}{x}$$ ← la componente verticale è $\frac{\sin_\tau x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin_\tau x}{x} = \text{velocità del punto al tempo } x=0$$

Obiettivo: dimostrare che questo limite esiste ed è finito.

(è analogo al limite: $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$)

Nota $\lim_{x\to 0} \frac{\sin_\tau x}{x} = \frac{\ell}{\tau}$ ← dipende da τ in questo modo

$$\frac{\sin_T x}{x} = \frac{\sin_\tau\left(\tau \frac{x}{T}\right)}{\frac{\tau x}{T}} \frac{\tau}{T} = \frac{\ell}{\tau}\cdot\frac{\tau}{T} = \frac{\ell}{T}$$

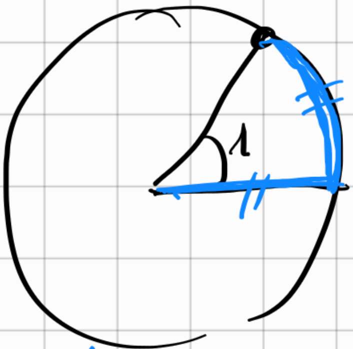
Se scegliamo $\tau = \ell$ $\quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin_\tau x}{x} = 1}$

Questo significa che la lunghezza della circonferenza unitaria è τ.

Definiamo $\pi = \frac{\ell}{2}$ $\qquad 2\pi = \ell$ $\qquad \frac{\ell}{\tau} = 1$

$$\Downarrow$$

$$\tau = \ell = 2\pi.$$



Gli angoli misurati con questa scelta di τ si dicono radianti.

Dimostriamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin_\tau x}{x}$ esiste ed è finito.

Passo 1. Usiamo le successioni.

Fissato x: $\quad a_n = \frac{\sin_\tau \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{n \sin_\tau \frac{x}{n}}{x}$

Vogliamo mostrare che a_n converge.

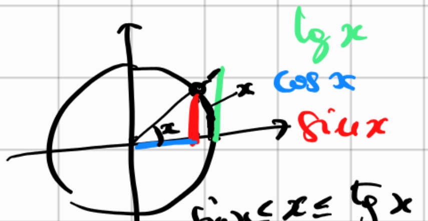
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Passo 2

$$\sin nx \le n \cdot \sin x \le \operatorname{tg} nx$$



$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$

Supponiamo $n \cdot x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

e dimostriamo per induzione.

Se $n = 1$ è ovvio.

- $\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$

$$\le n \cdot \sin x \cdot 1 + \sin x \le (n+1) \sin x. \quad \square$$

- $$\operatorname{tg}(n+1) \cdot x = \frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x}{1 - \underbrace{\operatorname{tg} nx \operatorname{tg} x}_{\ge 0 \text{ nel I quadrante}}} \ge \frac{n \sin x + \operatorname{tg} x}{1} \ge n \sin x + \sin x = (n+1) \sin x \quad \square$$

Passo 3

$\forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$ la successione

$$a_n = \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x} \quad \text{è crescente.}$$

$$n \sin \frac{x}{n} \overset{?}{\le} (n+1) \sin \frac{x}{n+1}$$

$$y = \frac{x}{(n+1) \cdot n}$$

$$n \sin (n+1) y \overset{?}{\le} (n+1) \sin ny$$

$$n \sin(n+1)y = n\left(\sin ny \cos y + \cos ny \sin y\right)$$

$$\le n \sin ny + \underbrace{n \sin y}\ \cos ny$$

$$\le n \sin ny + \operatorname{tg} ny \cdot \cos ny$$

$$= n \sin ny + \sin ny = (n+1) \sin ny.$$

$\square$

a_n è crescente $\Rightarrow$ $a_n \longrightarrow \frac{\ell}{\tau}$

Passo 4

$\frac{\ell}{\tau}$ è finito?

$n \sin x \le \operatorname{tg} nx$ (Passo 2)

$n \sin \frac{x}{n} \le \operatorname{tg} x$

$$\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} \le \operatorname{tg} x$$

$$a_n = \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \le \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{\tau} \le \frac{\operatorname{tg} x}{x} < +\infty. \qquad \square$$

Passo 5

$$\frac{\sin x}{x} \to \frac{\ell}{\tau} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\frac{\sin x}{x} \le \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \le \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

1

$$\cos x \, \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \le \cos x \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \le \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \to \frac{\ell}{\tau}$$

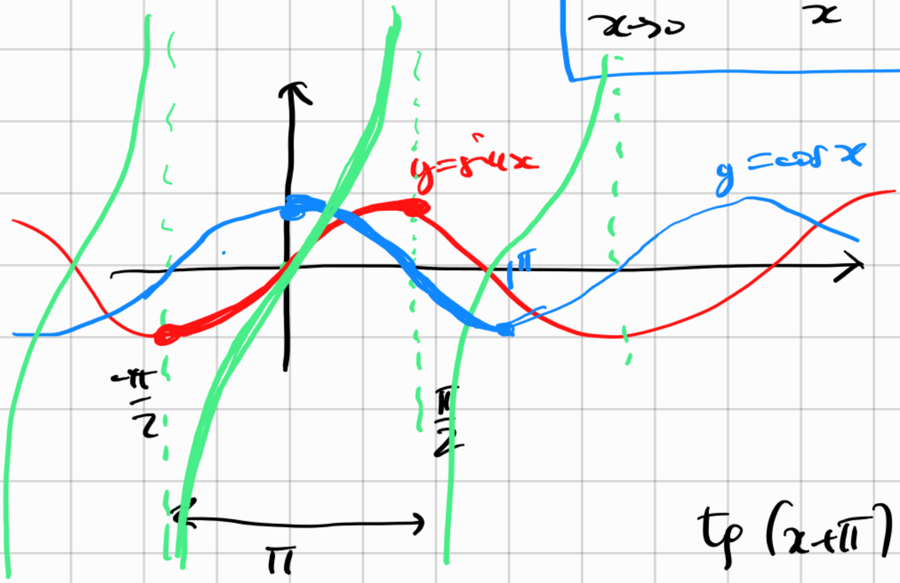
1, $\frac{\ell}{\tau}$

$$\frac{\sin x}{x} \downarrow \frac{\ell}{\tau}.$$

$\square$

D'ora in poi $\tau \doteq 2\pi$ tale che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$



$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$tg\,(x+\pi) = tg\, x.$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ $\boxed{\text{Buco da sistemare}}$

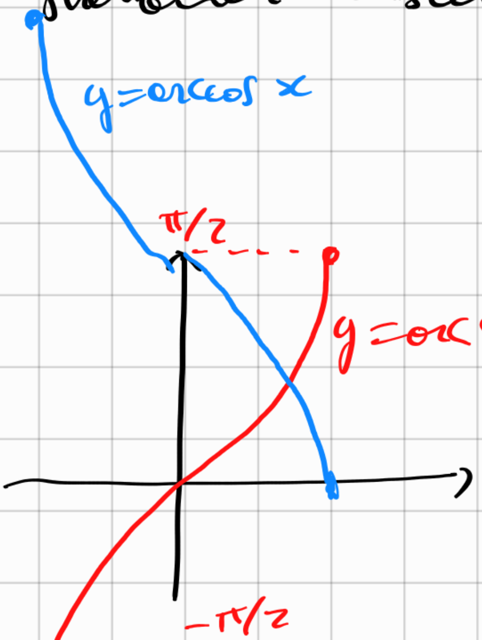
è strettamente crescente, continua.

$\Downarrow$

$\underbrace{\text{iniettiva} \qquad \text{suriettiva}}_{\text{è invertibile}}$ (Teo sugli intervalli — funzioni monotone)

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

è strettamente crescente, continua



Analogamente si definisce $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi)$ strett. decrescente

Analogamente

arctg :

$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è strett. crescente
bijettiva.

$\arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è strett. cresc.

$\square$