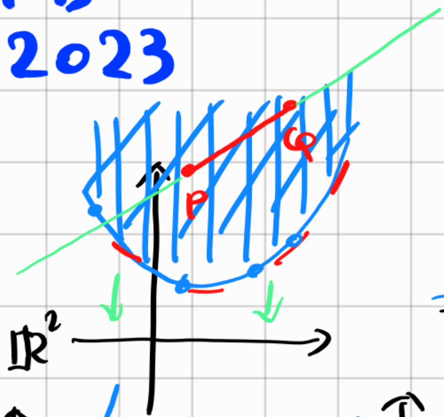
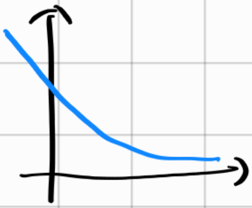
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 53 – 17. 2. 2023

FUNZIONI CONVESSE

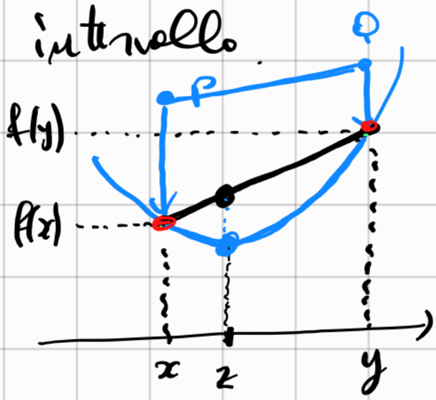


- f è convessa se
$$\operatorname{epi} f = \{(x,y) : y \geq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
è convesso.



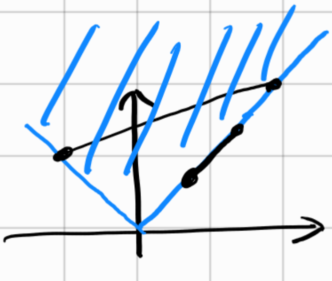
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall\, P,Q \in A$
$$[P,Q] \subseteq A$$
$$\parallel$$
$$\Big\{ \underbrace{(1-t)\cdot P + t\cdot Q}_{\text{combinazione convessa}} : t \in [0,1] \Big\}$$

Definizione analitica Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. diremo che f è convessa se:
$\forall x,y \in I$, $\forall t \in [0,1]$
$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t) f(x) + t\, f(y).$$

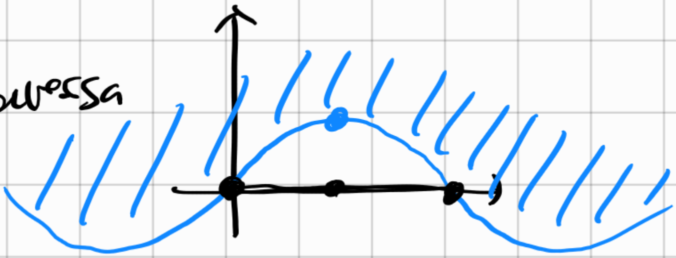


↳ il segmento $[P,Q]$ che unisce due punti P,Q del grafico di f sta nell'epigrafico di f.

ES $f(x) = |x|$ è convessa



ES $f(x) = \sin x$ non è convessa
$x = 0$, $y = \pi$ $t = \frac{1}{2}$

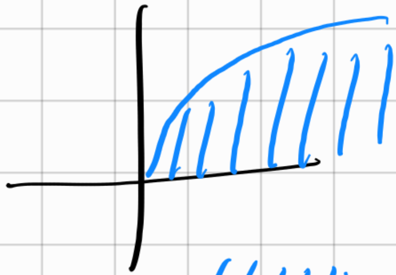


$$\underset{\underset{\displaystyle 1}{\parallel}}{\sin\left(\tfrac{1}{2}\,0 + \tfrac{1}{2}\pi\right)} \overset{\text{NO}}{\cancel{\leq}} \tfrac{1}{2}\sin(0) + \tfrac{1}{2}\sin(\pi) = 0$$

def f è <u>concava</u> se $-f$ è convessa ovvero

$$f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x) + t f(y)$$

$\forall x,y \ \forall t \in [0,1]$.



ES $f(x) = \sqrt{x}$

è concava

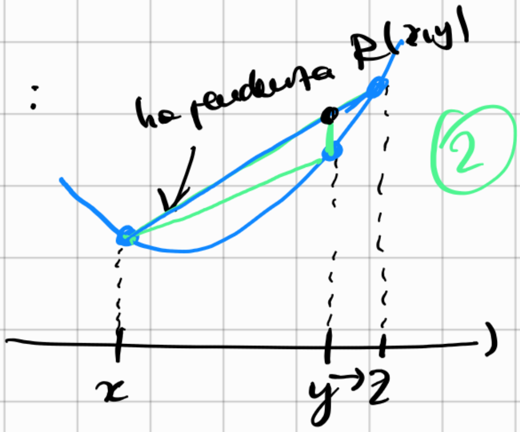
ES prototipo $f(x) = x^2$

è convessa

Lemma (caratterizzazione della convessità)

Data $f : I \to \mathbb{R}$, $x, y \in I$ definiamo: $x \neq y$

$$R(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$



Sono equivalenti:

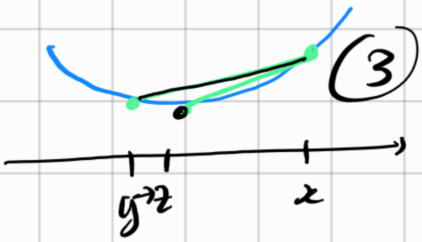
1) f è convessa ✓

2) $R(x,y)$ è crescente in y.

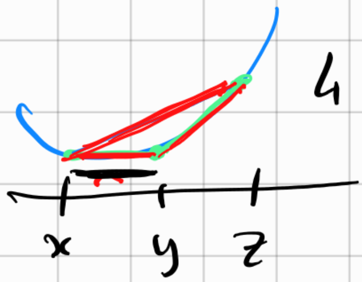
3) $R(x,y)$ è crescente in x

2') $y \leq z \Rightarrow R(x,y) \leq R(x,z)$

3') $x \leq y \Rightarrow R(x,z) \leq R(y,z)$

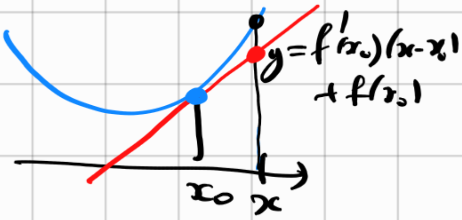


4) $x < y < z \Rightarrow R(x,y) \leq R(y,z)$



$$R(x,y) \leq R(x,z) \leq R(y,z)$$

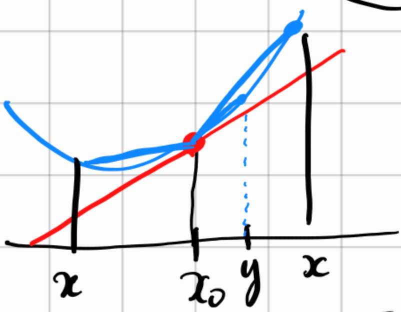
Teo Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora sono equivalenti:



1) f è convessa
2) $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$
(il grafico di f sta sopra la retta tangente) $\forall x_0 \in I \ \forall x \in I$.
3) f' è crescente.

$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$

dim $1) \Rightarrow 2)$



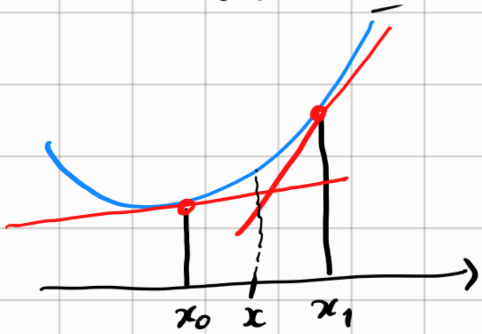
$x > x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{y \to x_0^+} R(x_0, y) \leq \underbrace{R(x_0, x)}$$

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

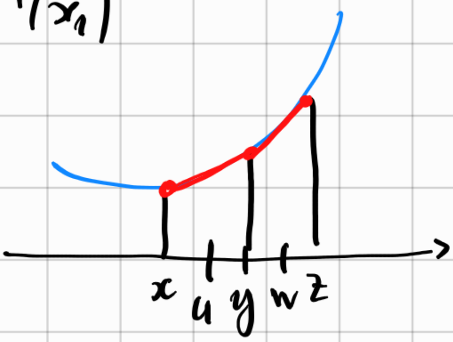
$2) \Rightarrow 3)$

$x_0 < x_1$



$$f'(x_0) \leq R(x_0, x) \leq f'(x_1)$$

$3) \Rightarrow 1)$



Basta dimostrare che se $x < y < z$ allora $R(x,y) \overset{?}{\leq} R(y,z)$

LAGRANGE!

$$R(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(u) \qquad R(y,z) = f'(w)$$

$u \in (x,y)$ $\qquad$ $w \in (y,z)$

$u < w \Rightarrow f'(u) \leq f'(w)$

$\square$

Corollario Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte

f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$

$\Updownarrow$ teorema sopra

f' crescente

criterio di monotonia

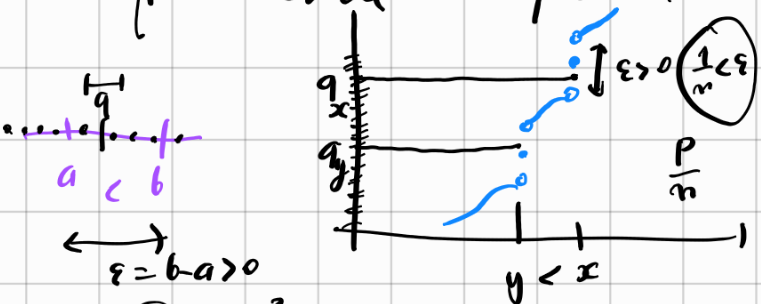
Es $f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \geq 0 \Rightarrow f$ è convessa

$f(x) = \ln x \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ è concava.

$f(x) = x^2 \qquad f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f$ è convessa.

Teo Se $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa f è derivabile in tutti i punti tranne al più un insieme numerabile.

Es Se $f : I \to \mathbb{R}$ è crescente f è continua in tutti i punti tranne al più un insieme numerabile.



se f crescente

$\lim_{x \to x_0^+} f$ esiste $= \inf \ldots$

$\vee\!\!\!\vee$

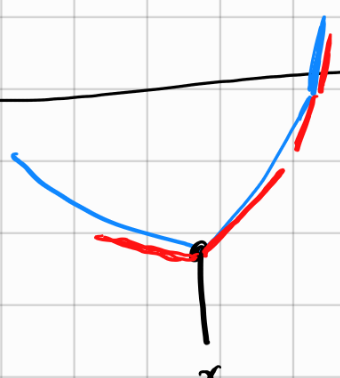
$\lim_{x \to x_0^-} f$ esiste $= \sup \ldots$

$\exists n : \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \frac{p}{n}$

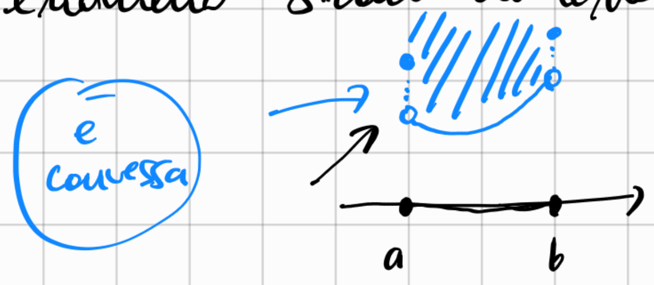
$$\varphi : \underbrace{\{x : f \text{ non è continua in } x\}}_{\# \operatorname{Disco}(f) \leq \# \mathbb{N}.} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad \text{iniettiva.}$$

$\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N}$

Per le convesse



Fenomeno strano da tenere presente



f convessa su I
$\Rightarrow$ f continua su
$\mathring{I} = (\inf I, \sup I)$.

Retta di supporto

f convessa $\Rightarrow$ $\forall x_0$ punto interno ad I
esiste una retta passante per $(x_0, f(x_0))$
t.c. $f \geq$ retta.

f convessa $\Leftrightarrow$ f = sup delle rette che gli stanno sotto