ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 66 — 20.3.2023

Convergenza assoluta

$a<b$

<u>Teorema</u> Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è localmente R-integrabile

se $\int_a^b |f|$ è convergente allora $\int_a^b f$ è convergente

e inoltre $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

<u>dim</u> $f = f^+ - f^-$ $\quad |f| = f^+ + f^-$

$$\int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-$$

$$\Rightarrow \int_a^b f^+ < +\infty \quad \text{e} \quad \int_a^b f^- < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \quad \text{è convergente}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_a^b f\right| \le \left|\int_a^b f^+\right| + \left|\int_a^b f^-\right| \qquad \begin{cases} f^+ \ge 0 \\ f^- \ge 0 \end{cases}$$

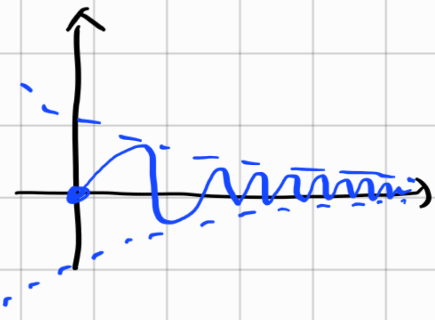
$$= \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|. \qquad \square$$

<u>Def</u> Diciamo che $\int_a^b f$ è assolutamente convergente

se $\int_a^b |f|$ è convergente.

<u>Esempio</u>

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, e^{-x}\, dx$$



$$\left|\sin(x^2)\cdot e^{-x}\right| \le e^{-x}$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\, e^{-x}\, dx}_{\text{converge}} \le \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

confronto puntuale

converge

$\Downarrow$

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, e^{-x}\, dx$ è assolutamente convergente.

Esempio (integrale convergente ma non assolutamente)

$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Fatti:

Per la serie: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

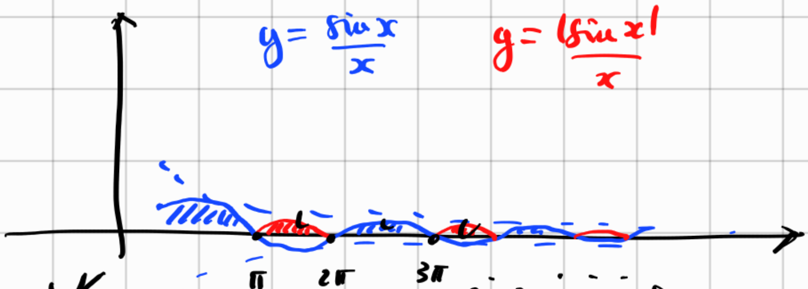
(0) $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \le \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$ $\square$

(1) $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ è divergente

(2) $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ è convergente.

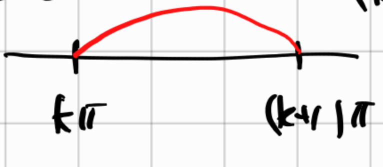
---

(0) ok.



(1)

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \ge \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\, dx = \frac{1}{(k+1)\pi}\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x\, dx\right| =$$



$$= \frac{1}{(k+1)\pi}\left|\Big[-\cos x\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right| =$$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi}\cdot 2 = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \ge \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$

(4) finalmente:

il limite esiste

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{\pi}^{\beta} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx.$$

Esercizio per ⌂ Trovare f continua tale che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ non esiste ma } \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = 0$$

Esercizio per ⌂ Trovare f continua tale che

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente ma non $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

MA Se $\int_0^{+\infty} f$ converge e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

allora $\ell = 0$.

---

(2) $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge?

$\left(\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}, \quad \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty \right)$

$$\int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\pi}^{\beta} - \int_{\pi}^{\beta} (-\cos x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

per $\beta\to+\infty$

$$\frac{\cos\pi}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

è assolutamente convergente

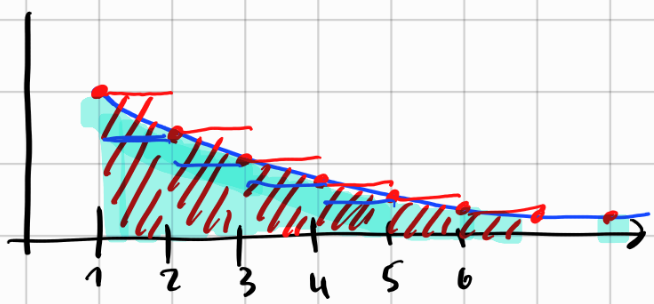
l'integrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ è convergente.

Teorema (collegamento tra serie e integrali)

Se $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ è monotona allora:

$$\int_1^{+\infty} f \quad \text{ha lo stesso carattere} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} f(k).$$

dim [Posso supporre che $f>0$, $\boxed{f \to 0 \text{ per } x \to +\infty.}$
f decrescente
altrimenti $\int f$ e $\sum f$ sono divergenti]



$\int_1^{+\infty} f$

$\sum_1^{+\infty} f$

$\sum_2^{+\infty} f$

Idea:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$$

$$\uparrow \qquad \uparrow_{n\to+\infty} \qquad \uparrow$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

□

Esempio 1 $\quad \sum \frac{1}{k^2}$ converge perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge.

Esempio 2 $\quad \sum \frac{1}{k}$ diverge perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ diverge

Esempio 3 $\quad \sum \frac{1}{k^p}$ converge $\Leftrightarrow p>1$ perché lo stesso vale per $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.

STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt \qquad \left[\text{PIÙ IN GENERALE } \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt \right]$$

① simmetrie di f, $a(x)$, $b(x)$ possono dare simmetrie di F.

Es $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \cdot dt$ è pari

Es $F(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ $\qquad \left[\frac{\sin t}{t} \to 1 \text{ per } t \to 0 \right.$

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{x} \frac{\sin(-s)}{(-s)} (-1)\,ds$$

$s = -t$, $ds = -dt$

$$= -\int_0^{x} \frac{\sin s}{s}\,ds = -F(x). \qquad F \text{ è dispari.}$$

⓪ Se $a(x) = b(x)$ allora $F(x) = 0$.
Se $f > 0$ e se $b(x) > a(x) \Rightarrow F(x) > 0$.

② Derivata: $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ $\qquad$ Se f è continua

$$F'(x) = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

infatti posto $G(x) = \int_{x_0}^{x} f$, $G'(x) = f(x)$ teorema fondamentale.

$$F(x) = \left[G(t) \right]_{a(x)}^{b(x)} = G(b(x)) - G(a(x))$$

$$F'(x) = G'(b(x)) \cdot b'(x) - G'(a(x))\,a'(x)$$
$$= f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

Esempio $$F(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$ Calcolare $F'(x)$.

$$F'(x) = \frac{1}{\ln(x^4)} \cdot 4x^3 - \frac{1}{\ln(x^2)}\, 2x$$

$$= \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\ln|x|} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\ln|x|} = \frac{x^3}{\ln|x|} - \frac{x}{\ln|x|}.$$

- Sapendo fare la derivata posso fare i limiti usando Taylor o l'Hospital.

Esercizio $$\lim_{x\to 0^+} \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{tg} t}{t^2}\, dt.$$