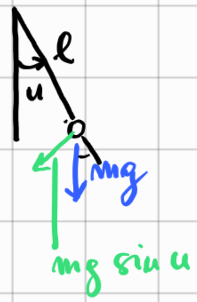
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 72 - 3.4.2023

Equazioni differenziali

Pendolo



$u = u(x)$ $\quad x =$ tempo

$v(x) = l\,u'(x)$

$a(x) = l\,u''(x)$

$$\cancel{m}\, l\, u'' = -\cancel{m} g \sin u$$

$$u''(x) = -\frac{g}{l}\sin u(x) \leftarrow \text{eq. differenziale}$$

incognita: $\quad u = u(x)$

L'equazione coinvolge u tramite operatori algebrici e derivate.

- EQ. FUNZIONALI : l'incognita è una funzione.

- EQ. DIFFERENZIALI. vs • EQ. INTEGRALI
  - coinvolgono le derivate / coinvolgono gli integrali.
  - ISTANTANEE (vs. • CON RITARDO)
    la funzione e le sue derivate vengono calcolate tutte allo stesso tempo x.
  - EDO (eq. diff. ordinarie) (ODE)
    $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è una funzione di 1 variabile.

(vs • EDP (eq. alle derivate parziali) (PDE))
$u(x,y,t)$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \dfrac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}$ $\quad$ eq. calore

L'equazione può essere in forma implicita

$$(*) \quad F\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) = 0$$

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

Si dice che u è soluzione di (*) se
$u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, u è derivabile n volte su I
intervallo
e vale (*) $\forall x \in I$.

n = ordine di derivazione massimo che compare nell'equazione si chiama ordine della equazione differenziale.

ES 1) (pendolo)

$$u''(x) = -\frac{g}{\ell} \sin u(x)$$

$$F(x, y, z, v) = v + \frac{g}{\ell} \cdot \sin y$$

y: $u(x)$, z: $u'(x)$, v: $u''(x)$

ES 2) (pendolo smorzato)

$$u''(x) + \sin u(x) + u'(x) = 0$$

$$F(x, y, z, v) = v + \sin y + z$$

ES 3) (pendolo forzato)

forza esterna

$$u''(x) + \sin u(x) + u'(x) - \sin x = 0$$

$$F(x, y, z, v) = v + \sin y + z - \sin x .$$

Sono equazioni differenziali ordinarie del II ordine (in forma implicita).

Le eq. 1 e 2 si dicono autonome in quanto la F non dipende da x cioè non c'è dipendenza esplicita da x.

$\Rightarrow$ $u''(x) + \sin u(x) = 0$ è autonoma.

$u'' + \sin u = 0$ $\leftarrow$ spesso si tralascia la dipendenza di u da x

$u''(x) + \sin u(x) - \sin x = 0$ $\leftarrow$ non è autonoma

$u'' + \sin u - \sin x = 0$

OSS Se l'equazione è autonoma e u è soluzione

anche $v(x) = u(x+T)$ è soluzione.

traslazione nel tempo.

Equazioni in forma normale

Analogo algebrico:

eq. implicita.

$x^2+y^2+z^2-1=0$

$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ $\leftarrow$ eq. in forma normale.

Per le EDO:

l'equazione è in forma normale se si può scrivere:

$$u^{(n)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right) \qquad (**)$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

(sotto opportune ipotesi su f.)

Vedremo che l'insieme delle soluzioni di (**) è uno spazio di "dimensione n".

(cioè le soluzioni si scrivono usando n parametri).

Ad esempio $u''(x) = -\frac{g}{\ell} \sin u(x)$

è in forma normale del II ordine. Le soluzioni sono identificate dal valore di $\underbrace{u \text{ e } u'}_{2 \text{ parametri}}$ al tempo $x=0$. | DETERMINISMO

EQ. LINEARI

Se F è lineare (affine) o f è lineare (affine nel fissato x) (in (*) e (**))

diremo che l'equazione è lineare omogenea.

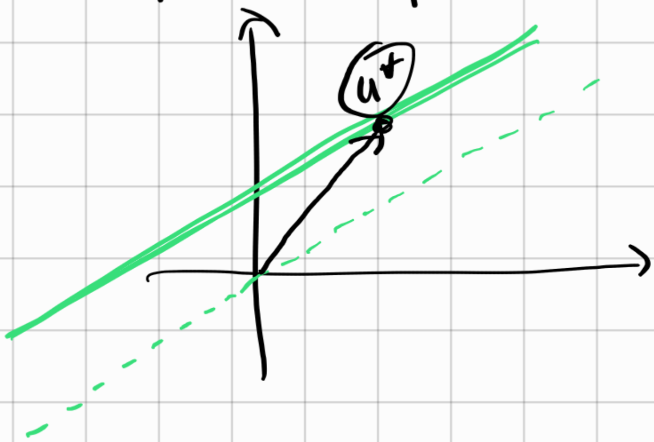
Oss vedremo che se l'equazione è lineare, se u e v sono soluzioni anche ogni combinazione lineare $\lambda u + \mu v$ è soluzione. principio di sovrapposizione

L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. (Vedremo che se l'eq. è in forma normale lo spazio delle soluzioni ha dimensione n)

ATTENZIONE ALLA NOMENCLATURA

	GEOMETRIA	ANALISI
$y = mx$	lineare	lineare omogenea
$y = mx + q$	affine	lineare (non omogenea)

Se l'equazione è lineare non omogenea lo spazio delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione n.



Esempio (pendolo linearizzato) Invece che $u'' = -\sin u$

$\sin u \sim u$ se u è piccolo.

$u'' = -u$ è lineare del II ordine.

le soluzioni sono: $u(x) = A \sin x + B \cos x$

$= C \cdot \sin(x - x_0)$

$V = \{ A \cdot \sin x + B \cos x \}$

è lo spazio delle soluzioni.

$(C = \sqrt{A^2 + B^2})$

$V = \text{span}\langle \sin, \cos \rangle$ $\dim V = 2$.

In generale:

EQ. lineare non omogenea di ordine n in forma normale

coefficienti

$$u^{(n)}(x) = a_{n-1}(x) \cdot u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot u'(x) + a_0(x) \cdot u(x) + g(x)$$

termine noto

$a_0, \dots a_{n-1}$ sono funzioni date.

Se $g(x) = 0$ l'equazione è omogenea.

ES $u'(x) = e^x \cdot u(x)$ è lineare omogenea

ES $u'(x) = u^2(x)$ non è lineare.

ES $u''(x) = x u'(x) + 2u(x) - \pi$
è lineare non omogenea.

$u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$
con $f(x,y,z) = x \cdot z + 2 \cdot y - \pi$
è lineare $\forall x$ fissato.

METODI RISOLUTIVI

Caso 0 $u'(x) = f(x)$. è la ricerca della primitive

$u \in \int f$ x_0 fissato.

$u(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$ su ogni intervallo.

1 parametro $n = 1$ è l'ordine dell'equazione

EQ LINEARI DEL PRIMO ORDINE (in forma normale)

$u'(x) + a(x) \cdot u(x) = b(x)$ $[u' = -a \cdot u + b]$

idea far comparire la derivata di un prodotto (fattore integrante)

Si moltiplica tutto per $e^{A(x)}$, $A' = a$.

$$e^{A(x)} \cdot u'(x) + a(x) \cdot e^{A(x)} u(x) = e^{A(x)} b(x)$$

$$\left(e^{A(x)} \cdot u(x) \right)' = e^{A(x)} b(x)$$

$$e^{A(x)} u(x) \in \int e^{A(x)} \cdot b(x).$$

<u>ES</u> $\qquad u'(x) = \lambda \cdot u(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$

$$u'(x) - \lambda \cdot u(x) = 0$$

$$e^{-\lambda x} u'(x) - \lambda e^{-\lambda x} u(x) = 0$$

$$\left(e^{-\lambda x} \cdot u(x) \right)' = 0$$

$$e^{-\lambda x} u(x) = c$$

$$u(x) = c \cdot e^{\lambda x}$$