ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 5 - 27.9.2023

ES 1 test settimanale

simboli: | >

f.b.f: un solo >

$$\overbrace{|||||}^{n} > \overbrace{||||||}^{m}$$

interpretazione

$n > m$

Assioma |>

Regole di inf. $x > y \to x|>y$ ①

$\to x|>|y$ ②

$n>m \Rightarrow n+1>m$

$n>m \Rightarrow n+1>m+1$

$10 \overset{?}{>} 3$

$|> \xrightarrow{②} ||>| \xrightarrow{②} |||>|| \xrightarrow{②} ||||>|||$

$\downarrow ①$

$||||||||||>||| \leftarrow \dots \xleftarrow{①} ||||||>||| \xleftarrow{①} |||||>|||$

Esercizio volta scorsa: $P(n)$: $n^n \geq n!$, $n \in \mathbb{N}$

per induzione: (i) $P(0)$?

$$\begin{array}{ccc} 0^0 & \overset{?}{\geq} & 0! \\ \| & & \| \\ 1 & & 1 \end{array}$$

(base)

(ii) $P(n) \overset{?}{\Rightarrow} P(n+1)$

$\uparrow$

Ipotesi induttiva

$n^n \geq n! \overset{?}{\Rightarrow} (n+1)^{(n+1)} \geq (n+1)!$

$$\underbrace{(n+1)^{n+1}} = (n+1)^n \cdot (n+1) \geq n^n \cdot (n+1) \overset{P(n)}{\geq} n! \cdot (n+1) = \underbrace{(n+1)!}$$

$\square$

SOMMATORIE (e PRODOTTI)

ES $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}$

ES $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n$

ES $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x = x+x+\dots+x = n\cdot x}$

Dimostrazione

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x = n\cdot x$

Formalmente si definiscono per induzione:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = S(n)$ k è una variabile "muta"

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$

$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

qualunque monoide ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, matrici ...)

$$\boxed{\begin{cases} S(0) = 0 \quad \text{(i)} \quad (S(1) = 1^2) \\ S(n+1) = S(n) + (n+1)^2 \quad \text{(ii)} \end{cases}}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	...
$S(n)$	0	1	5	14	30	55	91	140	...
	(i)	ii	ii	ii					

Stessa cosa con i PRODOTTI

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$

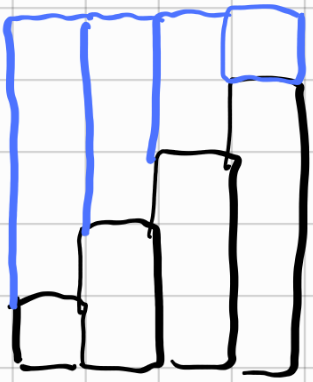
$\displaystyle P(n) = \prod_{k=1}^{n} k$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} m = m^n$

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(n+1) = P(n)\cdot(n+1) \end{cases}$$

$$\prod_{k=1}^{n} k^2 = (n!)^2 \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} 2^k = ?$$

<u>Esercizio</u> dimostriamo che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$



$$2(1+2+3+4) = 4 \cdot 5$$

$$(1+2+\dots+n)+$$
$$+(n+(n-1)+\dots+1) = \overbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}^{n}$$
$$= n(n+1)$$

<u>Come si dimostra per induzione?</u>

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i) $P(0)$? $\quad \sum_{k=1}^{0} k = \frac{0\cdot(0+1)}{2} \qquad 0 = 0 \qquad$ <u>ok</u>!

(ii) $P(n) \overset{?}{\Rightarrow} P(n+1) \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}_{\text{ipotesi induttiva}} \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\cdot\frac{n+2}{2} \quad \square$$

CVD

<u>Per casa</u> $\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad 4$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = ?}$$

Come si trovano queste formule?

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}$$

? ← SI RICAVA!

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3}_{\text{somma telescopica}} = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\cancel{(1+1)^3} - 1^3\right] + \left[\cancel{(2+1)^3} - \cancel{2^3}\right] + \dots \cancel{} + \left[(n+1)^3 - \cancel{n^3}\right]$$

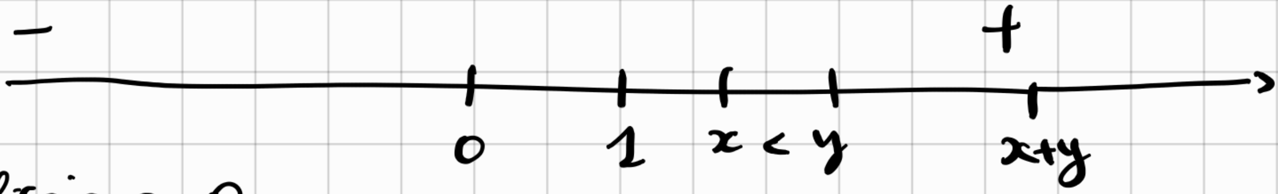
$$= (n+1)^3 - 1^3$$

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

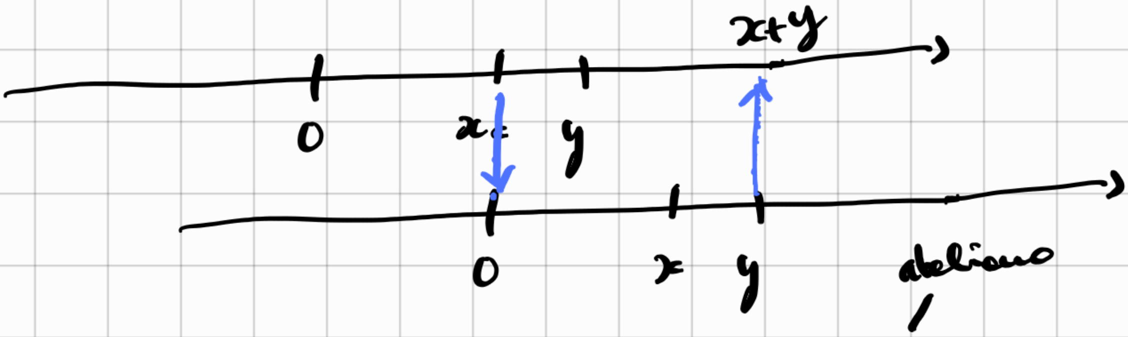
Es $\prod_{k=1}^{n} 2^k \overset{?}{=} 2^{\sum_{k=1}^{n} k}$ ← dimostrare per induzione.

I NUMERI REALI

LA RETTA GEOMETRICA

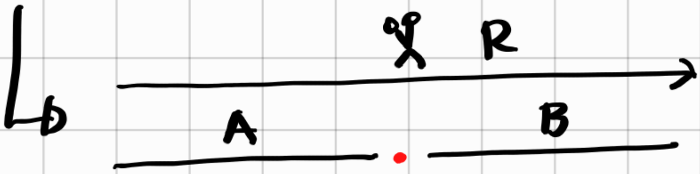


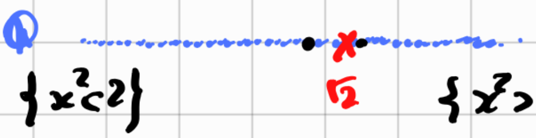
- fissiamo 0
- fissiamo un orientamento $\Rightarrow$ ordinamento
- fisso 1 in modo arbitrario $1 > 0$.



abeliano

Formalmente: $\mathbb{R}$ è un gruppo (additivo), totalmente ordinato, denso, continuo.





def [gruppo] $(G,+)$ è un gruppo se $+ : G\times G \to G$

$$(x,y) \mapsto x+y.$$

tale che:

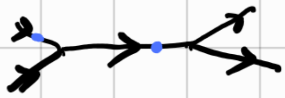
1. associativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\quad\forall x,y,z\in G$
2. elemento neutro: $\exists\, 0 : \; 0+x = x+0 = x$ $\quad\forall x\in G$
3. inverso (opposto): $\forall x\in G \;\exists y\in G : \; x+y=0$

Se l'operazione è $\cdot$ (gruppo moltiplicativo) l'elemento neutro si chiama 1 o e.

4. Se $x+y=y+x$ diremo che il gruppo è abeliano o commutativo.

Def [ordinamento] una relazione $\leq$ su R
$\hookrightarrow \{(x,y) : x \leq y\} \subseteq R \times R$
si dice essere una <u>relazione d'ordine</u> se:
(larga)

1. $x \leq x$ (riflessiva)
2. $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$. (antisimmetrica)
3. $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)



Se inoltre
4. $x \leq y$ o $y \leq x$.
si dice che l'ordinamento è <u>totale</u> o <u>lineare</u>

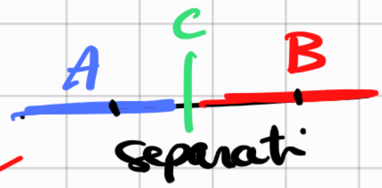
Def [Gruppo ordinato] $(R,+,\leq)$ si dice essere un <u>gruppo ordinato</u> se $(R,+)$ è un gruppo
$\leq$ è un ordinamento su R e inoltre:

vale: $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ e $z+x \leq z+y$
(monotonia).

Def [denso] $\leq$ ordinamento su R si dice essere <u>denso</u>: $\forall x,y \in R$ se $x \leq y$ e $x \neq y$
allora $\exists z : x \leq z,\ z \leq y$
$x \neq z \quad z \neq y$

$$\left(x<y \Rightarrow \exists z: \; x<z<y \right)$$

Def [continuo] $\leq$ un ordinamento su $\mathbb{R}$ si dice essere continuo se:



$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

$\forall a \in A \; \forall b \in B \quad a \leq b$

allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in A \; \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$

elemento di separazione.